Investigar para aprender.

Perspetivar o aluno como autor.

Formandos
Alda Silva, Anabela Torres, Cristina Castro, Dulce Gonçalves, João Afonso, Sandra Afonso, Teresa Prelhaz e Vera Costa

Formador
Paulo Oliveira

Trabalho final da formação

DEZEMBRO 2020

CFAERC

Capa

Wires Apophysis Fractal Flame

(fratal criado com o programa ‘Apophysis’ por Jonathan Zander em 24 de julho de 2007)

Índice

Introdução

Tradicionalmente, o ensino da Matemática centra-se em problemas fechados, completamente definidos, para os quais se pretende encontrar uma solução, assim como na resolução de exercícios, muitos deles rotineiros. Contudo, a experiência matemática dos alunos que resulta desta prática pode ser muito enriquecida por dinâmicas de trabalho marcadas por um estilo investigativo que, aliás, vai ao encontro do que é preconizado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória e na mais recente legislação em vigor. Por exemplo, o DL 55/2018 de 6 de julho, designadamente no artigo 19º, ao estabelecer prioridades relativamente ao planeamento curricular, centradas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, aponta para a *aquisição e desenvolvimento de competências de pesquisa, avaliação, reflexão, mobilização crítica e autónoma de informação, com vista à resolução de problemas e ao reforço da autoestima dos aluno*s, bem como para *a implementação do trabalho de projeto como dinâmica centrada no papel dos alunos enquanto autores, proporcionando aprendizagens significativas*.

Ora, perspetivar o aluno como autor, valorizando e desenvolvendo as suas competências de pesquisa, reflexão, mobilização crítica de informação para potenciar a resolução de problemas (abertos e fechados) implica que as dinâmicas de ensino-aprendizagem também tenham componentes que favoreçam tais objetivos. Esta formação pretendeu contribuir para aproximar os docentes dessas dinâmicas, permitindo-lhes desenvolver um estilo de abordar a matemática que, não sendo comum, poderia gerar inseguranças que obstaculizariam o pleno desenvolvimento matemático dos alunos. Este modo de trabalhar a matemática, dando ênfase também aos processos matemáticos e não apenas aos produtos, em geral, é um ponto frágil na formação inicial e contínua dos docentes da disciplina.

Nesta experiência formativa, os formandos identificaram temas/assuntos que podem ser trabalhados com os alunos num estilo investigativo e exploraram algumas situações matemáticas mais ou menos abertas associadas às Metas Curriculares de Matemática A. Deste modo, atuaram como investigadores para poderem replicar este estilo de trabalho com os alunos (naturalmente, sem prejuízo dos exercícios rotineiros e da resolução de problemas fechados que ainda têm/terão o papel predominante no processo de ensino-aprendizagem).

Nesta ação, privilegiaram-se as sessões de trabalho conjunto de natureza teórico/prática e prática. Como complemento dessas sessões de trabalho conjunto, os formandos realizaram trabalho autónomo para consolidar conhecimentos e técnicas associados ao estilo investigativo de abordar problemas matemáticos assim como para conceber e explorar tarefas apropriadas

para o trabalho com alunos. Essas tarefas são apresentadas no capítulo 1 e estão organizadas segundo os temas Geometria, Funções e Combinatória/Probabilidades.

No capítulo 2, são apresentadas breves reflexões dos formandos concernentes às potencialidades e constrangimentos associados a uma dinâmica de ensino exploratório/investigativo, que pretendem enquadrar o seu posicionamento crítico na conclusão desta experiência formativa.

As diversas restrições associadas à pandemia COVID-19, limitaram, de forma inesperada, as possibilidades de exploração das tarefas com os alunos em contexto de sala de aula. Ainda assim, no capítulo 3, são apresentados alguns trabalhos realizados por eles.

Finalmente, assinale-se que o presente trabalho é coletivo, no sentido próprio do termo, visto que todos os formandos participaram, numa lógica colegial, na conceção, exploração, estruturação, reformulação crítica e redação final de todas as tarefas.

O formador
Paulo Oliveira

Capítulo 1 – Tarefas investigativas

Geometria

Da planificação ao sólido – Qual a distância entre dois vértices?

Considere um cubo de aresta 4 unidades de comprimento (u.c.).

A partir da sua planificação (Figura 1), ao puxar o fio, alguns dos vértices do cubo vão-se aproximando (Figura 2) até que finalmente se obtém o cubo (Figura 3).

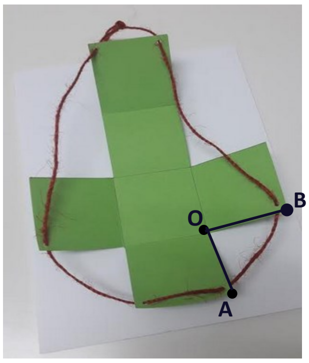


Figura 1

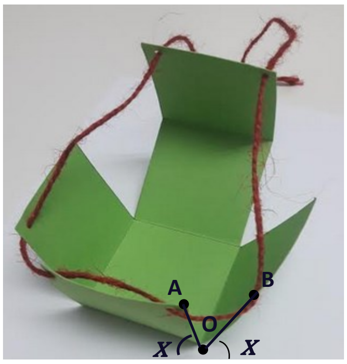


Figura 2

Figura 3

Nas figuras, estão assinalados os vértices A, B e O, bem como o ângulo x, ângulo que cada uma das arestas $[0A]$ e $[0B]$ forma com o plano horizontal.

Qual é a distância entre os vértices A e B, nas seguintes situações?

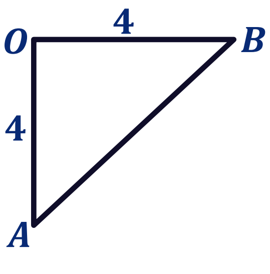
Situação 1 - Na planificação (Figura 1).

Situação 2 - No cubo (Figura 3).

Situação 3 - A meio do processo, ou seja, quando $x = \frac{\pi}{4}$ (Figura 2).

Desenvolvimento

Situação 1 – A distância entre os vértices A e B é $4\sqrt{2}$.



Pelo Teorema de Pitágoras,

$\overline{AB}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 32 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{32} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4\sqrt{2}$

Situação 2 – A distância entre os vértices A e B é 0, uma vez que os vértices A e B são coincidentes.

Situação 3 – A distância entre os vértices A e B é 4.

Considerando a colocação de um referencial o.n. $Oxyz$ na planificação do cubo, com origem no ponto O, pode-se considerar o ponto A contido em xOz, B em yOz e tal que os pontos A e B tenham cota positiva e $x = \frac{\pi}{4}$ (Figura 4).

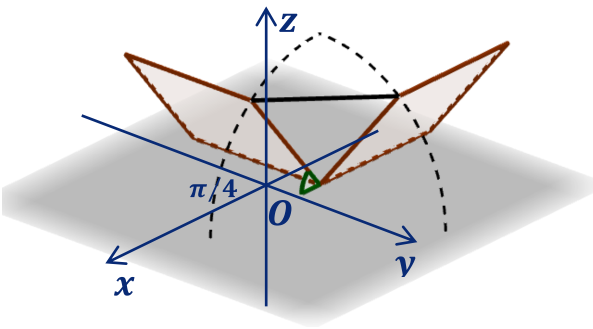


Figura 4

Assim, e estando o ponto A contido em xOz, tem de coordenadas $A\left(4cos\frac{\pi}{4}, 0, 4sen\frac{\pi}{4}\right)$, isto é, $A(2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2})$.

O ponto B contido em yOz, tem de coordenadas $B\left(0, 4cos\frac{\pi}{4}, 4sen\frac{\pi}{4}\right)$, isto é, $B(0, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Deste modo, $d(A, B) = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$.

Investigação

Seja a o comprimento da aresta do cubo. Considere a colocação de um referencial o.n. $Oxyz$ na planificação do cubo, com origem no ponto O, em que o ponto A está contido em xOz, B está contido em yOz, ambos têm cota positiva e x é o ângulo que cada uma das arestas $[AO]$ e $[BO]$ forma com o plano horizontal $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Defina a função d, distância entre os vértices A e B, em função de x.

Desenvolvimento

Representando num referencial o.n. $Oxyz$, a situação apresentada na Figura 2, para um qualquer valor de x $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, obtém-se:

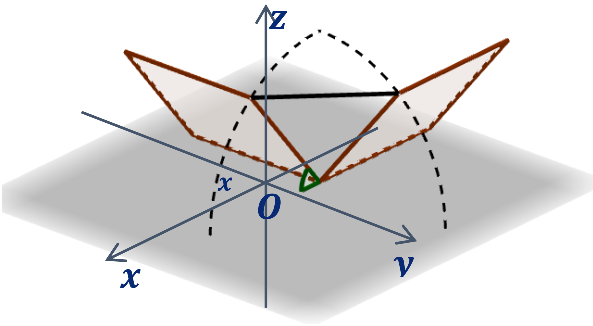


Figura 5

As coordenadas dos pontos A e B são $A(acosx, 0, asinx)$ e $B(0, acosx, asinx)$

$d(A, B) = \sqrt{a^2cos^2x + a^2cos^2x + 0} = a\sqrt{2cos^2x} = a\sqrt{2}cosx$

Conclusão A distância entre os vértices A e B pode ser dada, em função de x, por

$d(x) = a\sqrt{2}cosx$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Variação da investigação

Seja a o comprimento da aresta do cubo. Considere a colocação de um referencial o.n. $Oxyz$ na planificação do cubo, com origem no ponto O, em que o ponto A está contido em xOz, B está contido em yOz, ambos com cota positiva. Considere ainda que x é o ângulo que cada a aresta $[AO]$ forma com o plano xOy $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ e y é o ângulo que a aresta $[BO]$ forma com o plano xOy $\left(y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Defina a função d, distância entre os vértices A e B, em função de x e de y.

Desenvolvimento

Neste caso, as coordenadas dos pontos A e B serão $A(acosx, 0, asinx)$ e $B(0, acosy, asiny)$

$$d(A,B) = \sqrt{a^2cos^2x + a^2cos^2y + (asinx - asiny)^2} =$$

$$=\sqrt{a^2cos^2x + a^2cos^2y + a^2sin^2x - 2a^2sinxsiny + a^2sin^2y} =$$

$$=\sqrt{a^2sin^2y + a^2cos^2y + a^2sin^2x + a^2cos^2x - 2a^2sinxsiny} =$$

$$=\sqrt{a^2(sin^2y + cos^2y) + a^2(sin^2x + cos^2x) - 2a^2sinxsiny} =$$

$$=\sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2sinxsiny} = \sqrt{2a^2 - 2a^2sinxsiny} = a\sqrt{2}\sqrt{1 - sinxsiny}$$

Conclusão A distância entre os vértices A e B pode ser dada, em função de x e de y, por $d = a\sqrt{2}\sqrt{1 - sinxsiny}$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Extensão da investigação

Fixando o comprimento da aresta do cubo em uma unidade de comprimento, averigúe de que modo a representação gráfica da função obtida na investigação se poderá relacionar com a representação gráfica da função obtida variação da investigação.

Desenvolvimento

Com a investigação, verificou-se que a distância entre os vértices A e B, em função de x, pode ser dada por $d(x) = a\sqrt{2}cosx$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Num referencial xOy, podemos obter uma representação gráfica da função d, fixado o comprimento da aresta do cubo em uma unidade de comprimento, tal como se sugere na Figura 6.

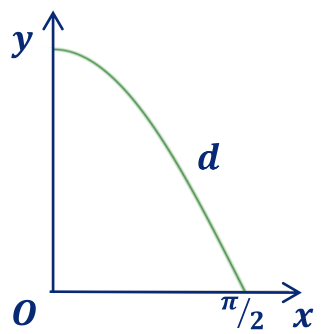


Figura 6

Na variação da investigação foi possível obter a distância entre os vértices A e B dada, em função de x e de y, tendo-se obtido $d = a\sqrt{2}\,\sqrt{1 - sinxsiny}$, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Assim, uma vez mais, fixando o comprimento da aresta do cubo numa unidade de comprimento, é possível obter uma representação gráfica da função d em referencial $Oxyz$ como sugere a Figura 7.

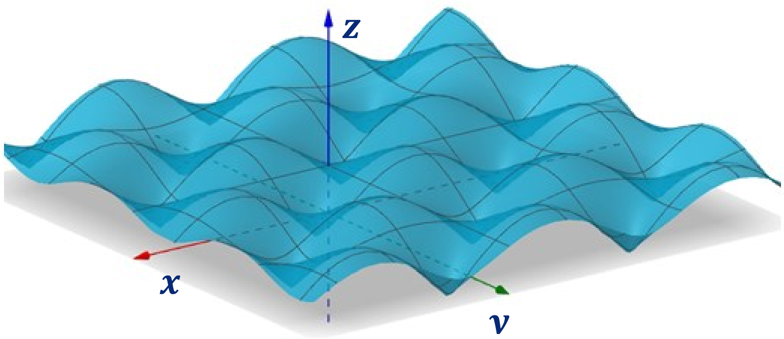


Figura 7

Considerando o caso particular em que os ângulos x e y são iguais. Isto é, considerando a interseção da superfície representada na Figura 7 com o plano $y = x$ e adequando ao domíno da função d, obtém-se a representação gráfica apresentada na Figura 8.

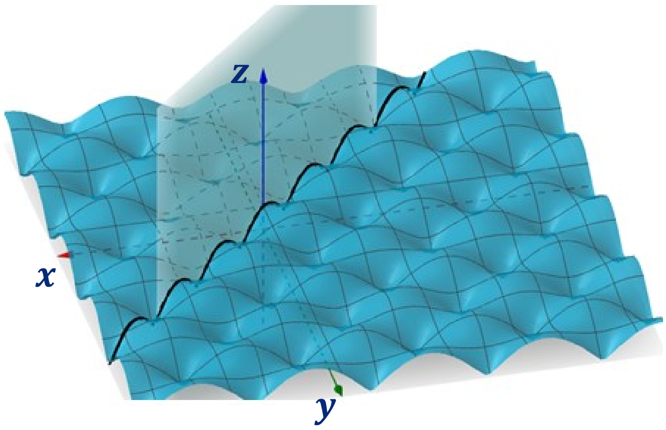


Figura 8

Na figura 8, está assinalada a negro a representação gráfica da interseção anteriormente mencionada. Se apenas se considerar a parte da curva situada no primeiro octante do referencial e com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, obtém--se a representação gráfica apresentada na figura 6.

Conclusão

Fixando o comprimento da aresta do cubo em uma unidade de comprimento, a representação gráfica da função obtida na investigação resulta da intersecção da representação gráfica da função obtida na variação da investigação com o plano $y = x$, situada no primeiro octante do referencial e com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Às voltas com a mediatriz

Consideremos os pontos $A(0,0)$ e $B(a,4)$, em que $a \in \mathbb{R}$, bem como as retas r e s, respetivamente, a mediatriz do segmento de reta $[AB]$ e a reta de equação $x = a$ (figura 1).

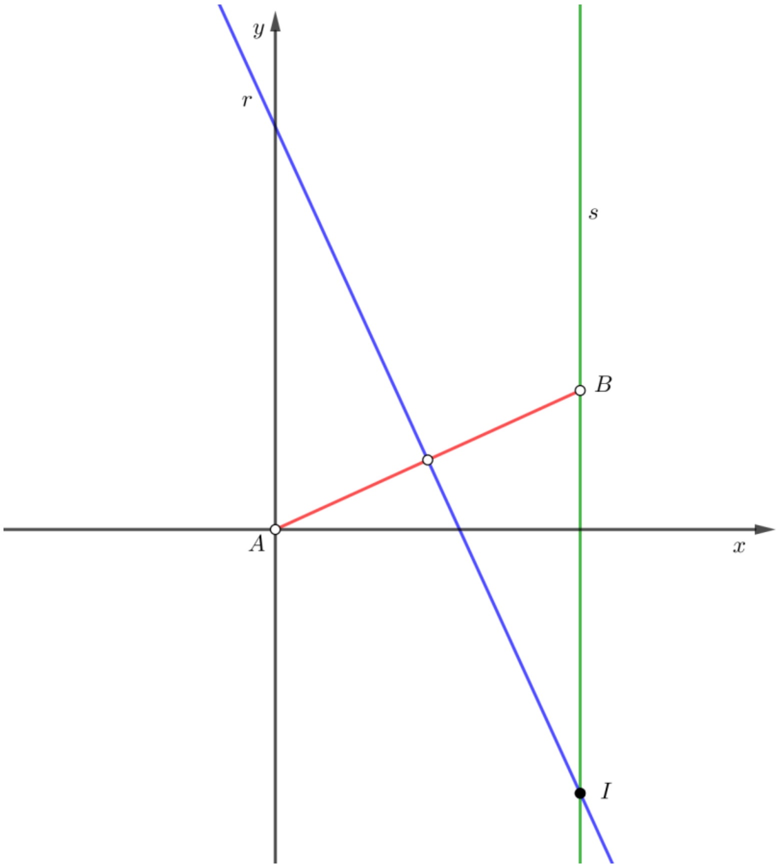


Figura 1

Investigação

Qual é o lugar geométrico dos pontos *I*, de interseção entre *r* e *s*?

Desenvolvimento

Comecemos por determinar a equação reduzida da reta r. Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da mediatriz. Então, $d(P,A) = d(P,B) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-4)^2}$.

Logo, elevando os dois membros da equação ao quadrado e desenvolvendo os casos notáveis, obtemos: $x^2 + y^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{4}x + \frac{a^2 + 16}{8}$.

Sendo $I(a, y_I)$ ponto de interseção de r e s, temos: $y_I = -\frac{a}{4} \times a + \frac{a^2 + 16}{8} = -\frac{1}{8}a^2 + 2$. Por conseguinte, como $I\left(a, -\frac{1}{8}a^2 + 2\right)$, o lugar geométrico destes pontos é a parábola de equação $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ (figura 2).

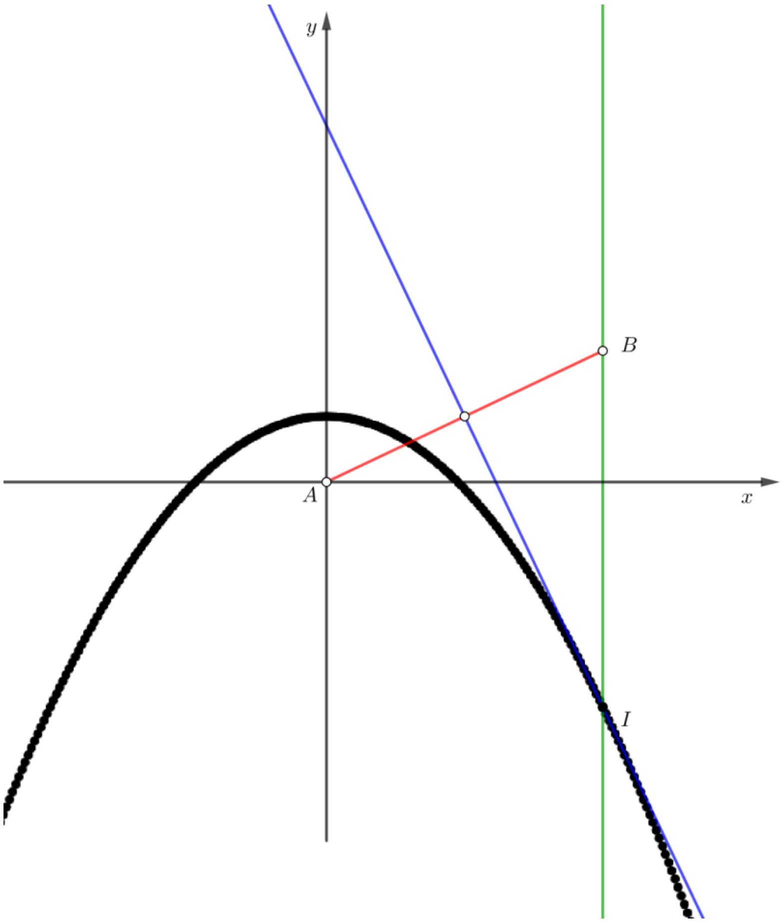


Figura 2

Generalização da investigação

Considera que $A(0,0)$ e $B(a,k)$ em que k é um número real positivo. Considerando r e s definidas como anteriormente, qual é o lugar geométrico dos pontos I, de interseção entre estas retas?

Desenvolvimento

Para determinar a equação reduzida da reta r, tomemos um ponto genérico $P\left(x,y\right)$ da mediatriz.

Então, $d\left(P,A\right)=d\left(P,B\right)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-k\right)^2}$.

Elevando os dois membros da equação ao quadrado e desenvolvendo os casos notáveis, obtemos: $x^2+y^2=x^2-2ax+a^2+y^2-2ky+k^2\Leftrightarrow 0=-2ax-2ky+a^2+k^2$. Resolvendo a equação em ordem a y, obtemos $y=-\frac{a}{k}x+\frac{a^2+k^2}{2k}$.

Então, sendo $I\left(a,y_I\right)$ ponto de interseção de r e s, temos:

$$\begin{aligned} y_I &= -\frac{a}{k}\times a+\frac{a^2+k^2}{2k} \\ &= \frac{-2a^2+a^2+k^2}{2k} \\ &= \frac{k^2-a^2}{2k} \\ &= \frac{k^2}{2k}-\frac{a^2}{2k} \\ &= -\frac{1}{2k}a^2+\frac{k}{2} \end{aligned}$$

Por conseguinte, como $I\left(a,-\frac{1}{2k}a^2+\frac{k}{2}\right)$, o lugar geométrico destes pontos é a parábola de equação $y=-\frac{1}{2k}x^2+\frac{k}{2}$.

Relativamente a esta parábola, temos:

- A concavidade é voltada para baixo, visto que $-\frac{1}{2k}<0$, porque $k>0$.
- Interseta o eixo dos xx em $\left(k,0\right)$ e $\left(-k,0\right)$. De facto, $y=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2k}x^2+\frac{k}{2}=0\Leftrightarrow x^2=k^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{k^2}\Leftrightarrow x=\pm k$, porque $k>0$.
- O vértice, V, tem coordenadas $V\left(0,\frac{k}{2}\right)$.

Variação da Investigação

Considera que $A(0,0)$ e $B(a,k)$ em que k é um número real negativo. Considerando r e s definidas como anteriormente, qual é o lugar geométrico dos pontos I, de interseção entre estas retas?

O desenvolvimento é análogo ao caso em que k é um número real positivo.

Relação entre o cosseno dos ângulos inscritos numa semi-elipse e os parâmetros a, b e c.

Consideremos a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, com $a>0 \wedge b>0 \ \wedge a>b$.

Qual a relação entre o cosseno dos ângulos inscritos na semi-elipse e os parâmetros a, b e c?

Qual é a sua conjetura?

Caso particular

Consideremos a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$, representada na Figura 1.

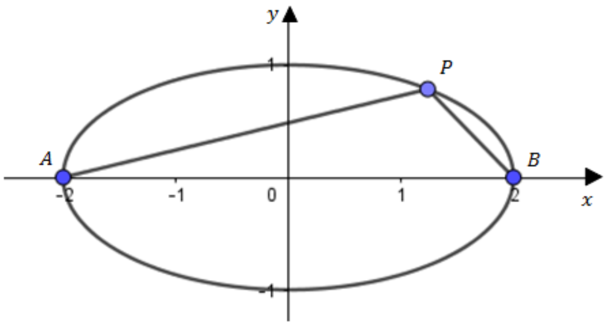


Figura 1

Desenvolvimento

Seja P um ponto genérico, de ordenada positiva, pertencente à elipse e A e B os vértices da elipse contidos no eixo Ox.

Sendo P um ponto da elipse então $P\left(x;\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$.

Atendendo à equação que define a elipse, conclui-se que $a=2$ e $b=1$

Assim, $A(-2;\ 0)$ e $B(2;\ 0)$

$$\overrightarrow{PA}=\left(-2-x;\ -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{PB}=\left(2-x;\ -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}=-4+x^2+\frac{4-x^2}{4}=\frac{3x^2-12}{4}$$

$$\|\overrightarrow{PA}\| = \sqrt{(-2-x)^2 + \left(-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{4+4x+x^2+\frac{4-x^2}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3x^2+16x+20}}{2}$$

$$\|\overrightarrow{PB}\| = \sqrt{(2-x)^2 + \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{4-4x+x^2+\frac{4-x^2}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3x^2-16x+20}}{2}$$

$$cos\left(A\hat{P}B\right) = \frac{\frac{3x^2-12}{4}}{\frac{\sqrt{3x^2+16x+20}}{2} \times \frac{\sqrt{3x^2-16x+20}}{2}}$$

$$= \frac{3x^2-12}{\sqrt{(3x^2+16x+20)(3x^2-16x+20)}}$$

$$= \frac{3(x^2-4)}{\sqrt{9(x-2)\left(x+\frac{10}{3}\right)(x+2)\left(x-\frac{10}{3}\right)}} =$$

$$= \frac{x^2-4}{\sqrt{(x^2-4)\left(x^2-\frac{100}{9}\right)}}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ e $a = 2$ e $b = 1$ tem-se $c^2 = 3$

Conjetura:

$$cos\left(A\hat{P}B\right) = \frac{x^2-a^2}{\sqrt{(x^2-a^2)\left(x^2-\frac{100}{c^4}\right)}}$$

Investigação

Consideremos agora a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1} = 1$, com o parâmetro $b = 1$, fixo e $a > 1$.

Qual a relação entre o cosseno dos ângulos inscritos na semi-elipse e o parâmetro a?

Desenvolvimento

Sendo P um ponto da elipse então $P\left(x;\ \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)$

Assim, $A(-a;\ 0)$ e $B(a;\ 0)$

$$\overrightarrow{PA} = \left(-a - x;\ -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(a - x;\ -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)$$

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = -a^2 + x^2 + \frac{a^2 - x^2}{a^2} = \frac{-a^4 + a^2x^2 + a^2 - x^2}{a^2}$$

$$= \frac{(a^2 - 1)x^2 - a^2(a^2 - 1)}{a^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{PA}\right\| = \sqrt{(-a - x)^2 + \left(-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2 + 2ax + x^2 + \frac{a^2-x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^4 + 2a^2x + a^2x^2 + a^2 - x^2}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 - 1)x^2 + 2a^3x + a^4 + a^2}}{a}$$

$$\left\|\overrightarrow{PB}\right\| = \sqrt{(a - x)^2 + \left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + \frac{a^2 - x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^4 - 2a^2x + a^2x^2 + a^2 - x^2}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 - 1)x^2 - 2a^3x + a^4 + a^2}}{a}$$

$$cos\left(A\hat{P}B\right) =$$

$$= \frac{\frac{(a^2 - 1)x^2 - a^2(a^2 - 1)}{a^2}}{\frac{\sqrt{(a^2 - 1)x^2 + 2a^3x + a^4 + a^2}}{a} \times \frac{\sqrt{(a^2 - 1)x^2 - 2a^3x + a^4 + a^2}}{a}}$$

$$= \frac{(a^2 - 1)x^2 - a^2(a^2 - 1)}{\sqrt{((a^2 - 1)x^2 + 2a^3x + a^4 + a^2)((a^2 - 1)x^2 - 2a^3x + a^4 + a^2)}}$$

$$= \frac{(a^2-1)(x^2-a^2)}{\sqrt{(a^2-1)^2\left(x+\frac{a(a^2+1)}{a^2-1}\right)(x+a)\left(x-\frac{a(a^2+1)}{a^2-1}\right)(x-a)}} =$$

$$= \frac{(a^2-1)(x^2-a^2)}{\sqrt{(a^2-1)^2(x^2-a^2)\left(x^2-\frac{a^2(a^2+1)^2}{(a^2-1)^2}\right)}}$$

Cálculos auxiliares

- $(a^2-1)x^2+2a^3x+a^4+a^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2a^3 \pm \sqrt{4a^6-4(a^2-1)(a^4+a^2)}}{2(a^2-1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-2a^3 \pm \sqrt{4a^2}}{2(a^2-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-2a^3 \pm 2a}{2(a^2-1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2a(a^2+1)}{2(a^2-1)} \vee x = -\frac{2a(a^2-1)}{2(a^2-1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{a(a^2+1)}{a^2-1} \vee x = -a$$

- $(a^2-1)x^2-2a^3x+a^4+a^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2a^3 \pm \sqrt{4a^6-4(a^2-1)(a^4+a^2)}}{2(a^2-1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2a^3 \pm \sqrt{4a^2}}{2(a^2-1)} \Leftrightarrow x = \frac{2a^3 \pm 2a}{2(a^2-1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2a(a^2+1)}{2(a^2-1)} \vee x = \frac{2a(a^2-1)}{2(a^2-1)} \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{a(a^2+1)}{a^2-1} \vee x = a$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ e $b = 1$ tem-se $c^2 = a^2 - 1$

$$cos\left(A\hat{P}B\right) = \frac{c^2(x^2-a^2)}{\sqrt{c^4(x^2-a^2)\left(x^2-\frac{a^2(a^2+1)^2}{c^4}\right)}}$$
$$= \frac{(x^2-a^2)}{\sqrt{(x^2-a^2)\left(x^2-\frac{a^2(a^2+1)^2}{c^4}\right)}}$$

Conjetura:

$$cos\left(A\hat{P}B\right) = \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{(x^2 - a^2)\left(x^2 - \frac{a^2(a^2 + b^2)^2}{c^4}\right)}}$$

Generalização da investigação

Considerando agora a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\; a > 0 \wedge b > 0 \;\wedge a > b$.

A relação encontrada manter-se-á entre os ângulos da semi-elipse?

Desenvolvimento

Sendo P um ponto da elipse então $P\left(x;\ \frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)$

Assim, $A(-a;\ 0)$ e $B(a;\ 0)$

$$\overrightarrow{PA} = \left(-a - x;\ -\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(a - x;\ -\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)$$

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = -a^2 + x^2 + \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} = \frac{-a^4 + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)x^2 - a^2(a^2 - b^2)}{a^2} = \frac{(a^2 - b^2)(x^2 - a^2)}{a^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{PA}\right\| = \sqrt{(-a - x)^2 + \left(-\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2 + 2ax + x^2 + \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^4 + 2a^2x + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)x^2 + 2a^3x + a^4 + a^2b^2}}{a}$$

$$\left\|\overrightarrow{PB}\right\| = \sqrt{(a - x)^2 + \left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + \frac{a^2 - x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^4 - 2a^2x + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)x^2 - 2a^3x + a^4 + a^2b^2}}{a}$$

$$cos\left(A\hat{P}B\right) = \frac{\frac{(a^2 - b^2)(x^2 - a^2)}{a^2}}{\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)x^2 + 2a^3x + a^4 + a^2b^2}}{a} \times \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)x^2 - 2a^3x + a^4 + a^2b^2}}{a}} =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)(x^2 - a^2)}{\sqrt{((a^2 - b^2)x^2 + 2a^3x + a^4 + a^2b^2)((a^2 - b^2)x^2 - 2a^3x + a^4 + a^2b^2)}} =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)(x^2 - a^2)}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 \left(x + \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}\right)(x + a)\left(x - \frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}\right)(x - a)}}$$

$$=$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)(x^2 - a^2)}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2(x^2 - a^2)\left(x^2 - \frac{a^2(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2}\right)}}$$

Cálculos auxiliares

- $(a^2 - b^2)x^2 + 2a^3x + a^4 + a^2b^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2a^3 \pm \sqrt{4a^6 - 4(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2)}}{2(a^2 - b^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2a^3 \pm \sqrt{4a^2b^4}}{2(a^2 - b^2)} \Leftrightarrow x = \frac{-2a^3 \pm 2ab^2}{2(a^2 - b^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2a(a^2 + b^2)}{2(a^2 - b^2)} \vee x = -\frac{2a(a^2 - b^2)}{2(a^2 - b^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} \vee x = -a$$

- $(a^2 - 1)x^2 - 2a^3x + a^4 + a^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2a^3 \pm \sqrt{4a^6 - 4(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2)}}{2(a^2 - b^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2a^3 \pm \sqrt{4a^2b^2}}{2(a^2 - b^2)} \Leftrightarrow x = \frac{2a^3 \pm 2ab}{2(a^2 - b^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2a(a^2 + b^2)}{2(a^2 - b^2)} \vee x = \frac{2a(a^2 - b^2)}{2(a^2 - b^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a(a^2 + b)}{a^2 - b^2} \vee x = a$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ tem-se $c^2 = a^2 - b^2$, logo

$$\cos(A\hat{P}B) = \frac{c^2(x^2 - a^2)}{\sqrt{c^4(x^2 - a^2)\left(x^2 - \frac{a^2(a^2 + b^2)^2}{c^4}\right)}}$$

$$= \frac{(x^2 - a^2)}{\sqrt{(x^2 - a^2)\left(x^2 - \frac{a^2(a^2 + b^2)^2}{c^4}\right)}}$$

Conclusão Confirma-se a conjetura.

Funções

Onde é que as tangentes se intersetam?

Consideremos a função quadrática f definida por $f(x) = x^2 + x - 2$. Seja ainda r a reta tangente ao gráfico de f no ponto $T(2,4)$. Em que ponto a tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa simétrica de T interseta r?

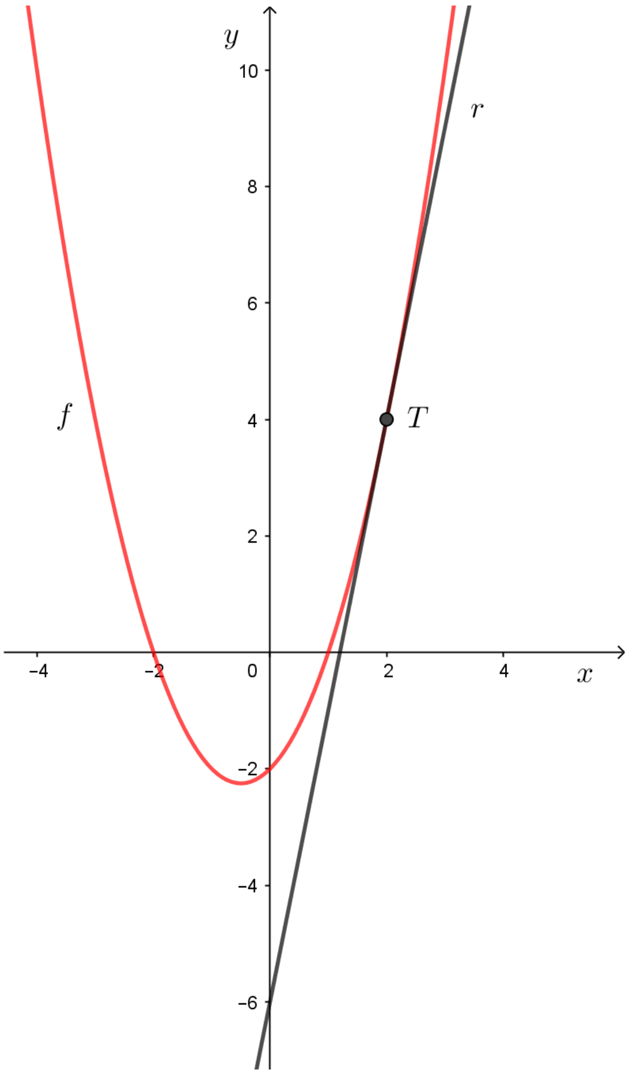


Figura 1

Desenvolvimento

Seja s a reta tangente ao gráfico de f em $U(-2, f(-2))$, ou seja, $U(-2,0)$. Ora, $f'(x) = 2x + 1$ pelo que $f'(-2) = -3$. Por conseguinte, a reta s tem equação reduzida $y = -3x + b$. Sendo U o ponto de tangência, temos $0 = -3 \times (-2) + b$, donde $b = -6$. Analogamente, como r é tangente ao gráfico de f em $T(2, f(2))$ e $f'(2) = 5$, a equação reduzida de r é $y = 5x - 6$.

Então, as retas r e s intersetam-se no ponto $I(0, -6)$.

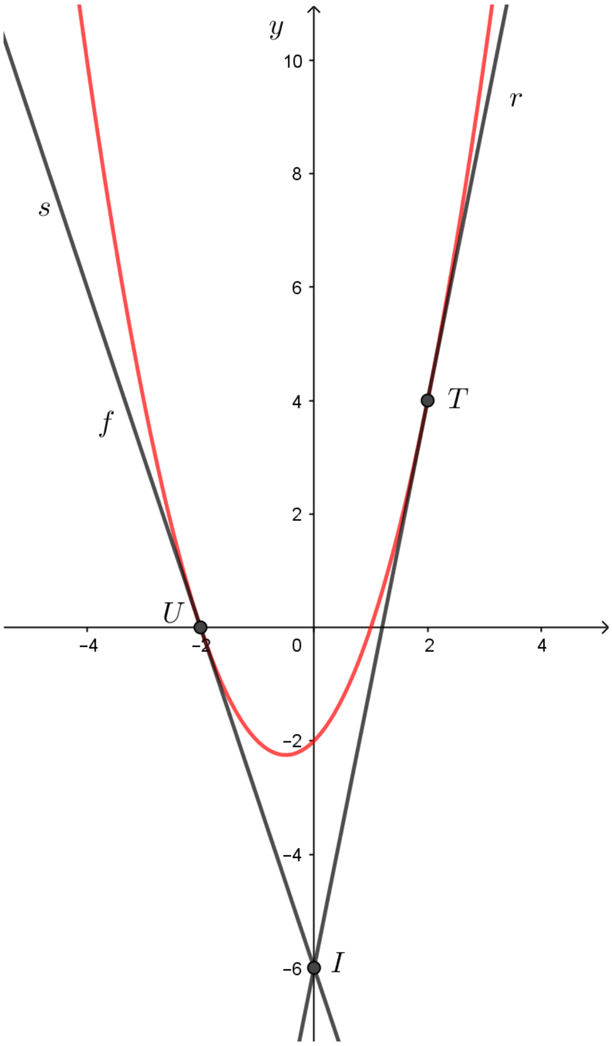


Figura 2

Investigação

Seja f a função quadrática definida por $f(x) = x^2 + x - 2$. Consideremos os pontos $T(a, f(a))$ e $U(-a, f(-a))$, bem como as retas r e s tangentes ao gráfico de f em T e U, respetivamente. Qual é o lugar geométrico dos pontos I, de interseção entre r e s?

Desenvolvimento

Ora, $f'(x) = 2x + 1$. Comecemos por determinar a equação reduzida da reta r. Como $m_r = f'(a) = 2a + 1$, temos $y = (2a+1)x + b$. Logo, $f(a) = (2a+1)a + b$, e, assim, $b = f(a) - 2a^2 - a = a^2 + a - 2 - 2a^2 - a = -a^2 - 2$. Temos assim que a equação reduzida de r é $y = (2a+1)x - a^2 - 2$.

No caso da reta s, tem-se $m_s = f'(-a) = -2a + 1$ e, portanto, $y = (-2a+1)x + b$. Substituindo as coordenadas de U nesta equação, obtemos $f(-a) = (-2a+1) \times (-a) + b$, ou seja, $a^2 - a - 2 = 2a^2 - a + b$, e, finalmente, $b = -a^2 - 2$. Donde, $y = (-2a+1)x - a^2 - 2$ é a equação reduzida de s. Conclusão: r e s intersetam-se no ponto $I(0, -a^2 - 2)$.

Generalização da investigação

Seja f a função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Consideremos os pontos $T(k, f(k))$ e $U(-k, f(-k))$, bem como as retas r e s tangentes ao gráfico de f em T e U, respetivamente. Qual é o lugar geométrico dos pontos I, de interseção entre r e s? Qual é a tua conjetura?

Desenvolvimento

Ora, $f'(x) = 2ax + b$. Comecemos por determinar a equação reduzida da reta r, nomeadamente, $y = m_r x + p$. Como $m_r = f'(k) = 2ak + b$, temos $y = (2ak+b)x + p$. Logo, $f(k) = (2ak+b)k + p$, e, assim, $p = f(k) - 2ak^2 - bk = (ak^2 + bk + c) - 2ak^2 - bk$, donde, $p = -ak^2 + c$. Então, a equação reduzida de r é $y = (2ak+b)x - ak^2 + c$.

No caso da reta s, de equação reduzida $y = m_s x + q$, tem-se $m_s = f'(-k) = -2ak + b$ e, portanto, $y = (-2ak+b)x + q$. Substituindo as coordenadas de U nesta equação, obtemos $f(-k) = (-2ak+b) \times (-k) + q$, ou seja, $ak^2 - bk + c = 2ak^2 - bk + q$, e, finalmente, $q = -ak^2 + c$. Donde, $y = (-2ak+b)x - ak^2 + c$ é a equação reduzida de s. Conclusão: r e s intersetam-se no ponto $I(0, -ak^2 + c)$.

Variação da Investigação

Considera que $A(0,0)$ e $B(a,k)$ em que k é um número real negativo. Considerando r e s definidas como anteriormente, qual é o lugar geométrico dos pontos I, de interseção entre estas retas?

O desenvolvimento é análogo ao correspondente a k número real positivo.

O que acontece às abcissas?

Consideremos a função quadrática f definida por $f\left(x\right) = x^2$. Seja ainda r a reta de equação reduzida $y = 3x + 5$ e A e B os pontos em que r interseta o gráfico de f.

Investiga se existe alguma relação entre as abcissas de A e B e o declive de r.

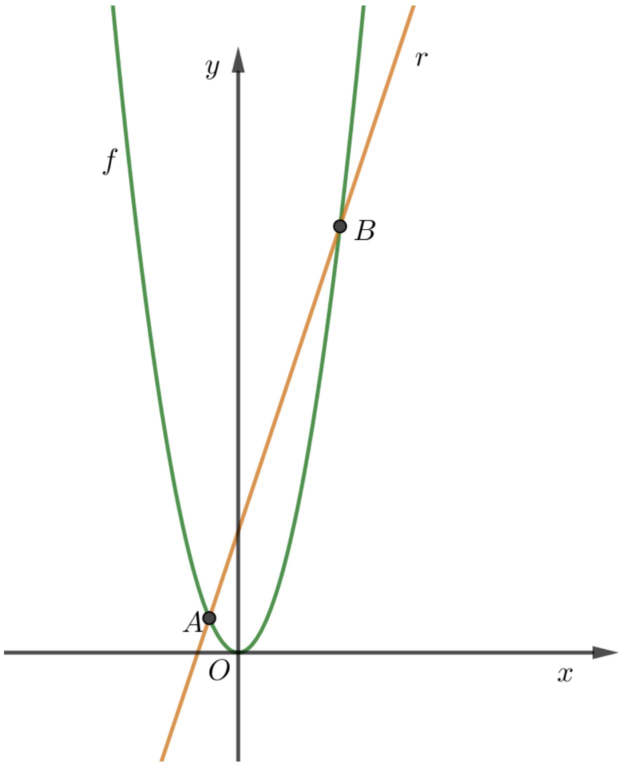


Figura 1

Desenvolvimento

Para descobrir as abcissas de A e B, x_A e x_B, resolvamos a equação $f\left(x\right) = 3x + 5$. Esta equação é equivalente a $x^2 - 3x - 5 = 0$ que tem soluções $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$.

Então, $x_A = \dfrac{3 - \sqrt{29}}{2}$ e $x_B = \dfrac{3 + \sqrt{29}}{2}$.

Por conseguinte, $x_A + x_B = \dfrac{3 - \sqrt{29}}{2} + \dfrac{3 + \sqrt{29}}{2} = 3$ e o declive de r também é 3. Conclui-se, assim, que a soma das abcissas de A e B é igual ao declive da reta r.

Investigação

Seja f a função quadrática definida por $f(x) = x^2$. Consideremos a reta r de equação reduzida $y = mx + b$, bem como os pontos A e B em que r interseta o gráfico de f.

Qual é a relação entre as abcissas de A e B e o declive de r? O que conjeturas? Demonstra a conjetura ou invalida-a.

Desenvolvimento

A exploração inicial leva-nos a conjeturar que a soma das abcissas dos pontos de interseção de r com o gráfico de f é igual ao declive desta reta.

Comecemos por resolver a equação $f(x) = mx + b$ para descobrir x_A e x_B.

Ora, $f(x) = mx + b \Leftrightarrow x^2 - mx - b = 0$. Pela fórmula resolvente da equação do segundo grau, obtemos $x = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 + 4b}}{2}$, com $m^2 + 4b > 0$ para garantir que r interseta o gráfico de f em dois pontos. Supondo, como anteriormente, que $x_A < x_B$, temos $x_A + x_B = \dfrac{m - \sqrt{m^2 + 4b}}{2} + \dfrac{m + \sqrt{m^2 + 4b}}{2} = m$. Fica assim demonstrada a conjetura.

Generalização da investigação

Seja f a função quadrática definida por $f(x) = x^2 + c$. Consideremos a reta r de equação reduzida $y = mx + b$, bem como os pontos A e B em que r interseta o gráfico de f.

Qual é a relação entre as abcissas de A e B e o declive de r? O que conjeturas? Demonstra a conjetura ou invalida-a.

Desenvolvimento

À partida podemos conjeturar que a soma das abcissas dos pontos de interseção de r com o gráfico de f é igual ao declive desta reta.

Comecemos por resolver a equação $f(x) = mx + b$ para descobrir x_A e x_B.

Ora, $f(x) = mx + b \Leftrightarrow x^2 - mx + (c - b) = 0$. Pela fórmula resolvente da equação do segundo grau, obtemos $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4(b-c)}}{2}$, com $m^2 + 4(b-c) > 0$ para garantir que r interseta o gráfico de f em dois pontos. Se $x_A < x_B$, temos $x_A + x_B = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4(b-c)}}{2} + \frac{m + \sqrt{m^2 + 4(b-c)}}{2} = m$.

A conjetura é válida e fica assim demonstrada.

Prolongamento

Seja f a função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Consideremos a reta r de equação reduzida $y = mx + k$, bem como os pontos A e B em que r interseta o gráfico de f.

O que podemos afirmar acerca de a, b e c de modo a que a propriedade que descobrimos na investigação anterior continue válida? O que conjeturas? Demonstra a conjetura ou invalida-a.

Desenvolvimento

Será que ainda podemos conjeturar que a soma das abcissas dos pontos de interseção de r com o gráfico de f é igual ao declive desta reta?

Comecemos por resolver a equação $f(x) = mx + k$ para descobrir x_A e x_B.

Ora, $f(x) = mx + k \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = mx + k \Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + (c-k) = 0$. Pela fórmula resolvente da equação do segundo grau, obtemos

$$x = \frac{m - b \pm \sqrt{(b-m)^2 + 4a(k-c)}}{2a}$$

com $(b-m)^2 + 4(k-c) > 0$ para garantir que r interseta o gráfico de f em dois pontos.

Se $x_A < x_B$, temos

$$x_A + x_B = \frac{m - b - \sqrt{(b-m)^2 + 4a(k-c)} + m - b + \sqrt{(b-m)^2 + 4a(k-c)}}{2a}$$

Simplificando,

$$x_A + x_B = \frac{2m - 2b}{2a} \Leftrightarrow x_A + x_B = \frac{m-b}{a}$$

A conjetura é válida se $b = 0 \wedge a = 1$.

Funções bijetivas

Considera a função bijetiva, portanto, invertível, definida por $g(x) = x^3$ e os pontos A do gráfico de g e A' do gráfico de g^{-1}, de coordenadas $(2,8)$ e $(8,2)$, respetivamente, cuja representação gráfica se apresenta.

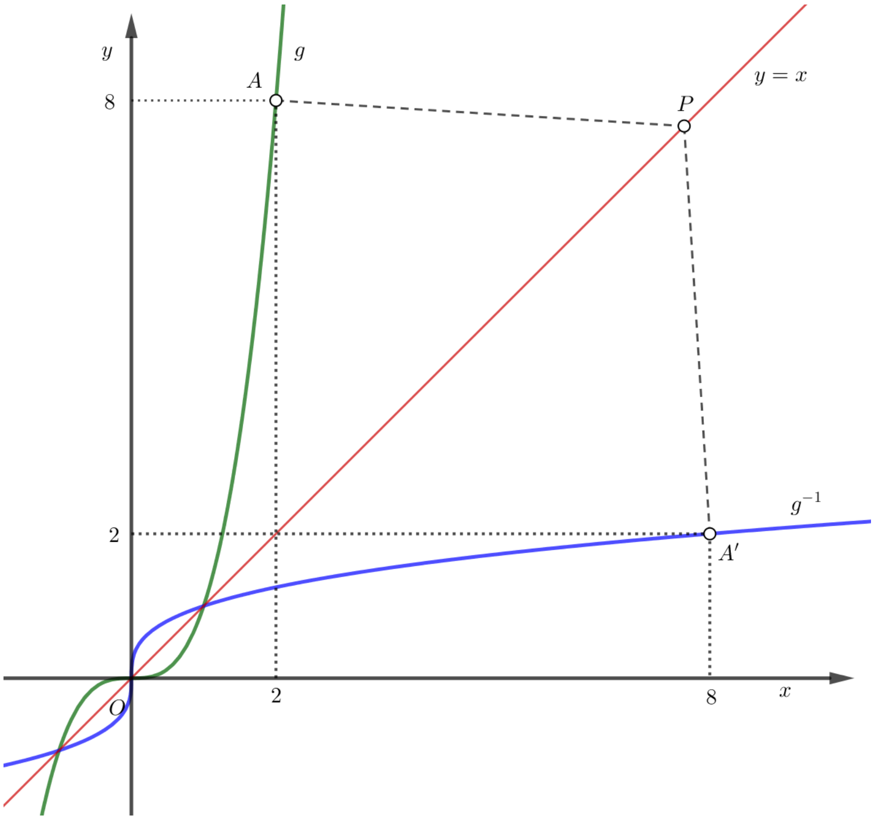


Figura 1

Seja P um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares

Investigação

Existe alguma relação entre o ponto P e os pontos A e A' ?

Demonstra a tua conjetura.

Desenvolvimento

O ponto A' é simétrico de A em relação à reta de equação $y = x$. Para que tal aconteça, é necessário que:

- $\overline{AP} = \overline{A'P}$

- $[AA']$ seja perpendicular a $y = x$

Sendo $A(2,8)$, $A'(8,2)$ e $P(x,x)$ temos que $\overline{AP} = \overline{A'P}$, senão vejamos:

$\overline{AP} = \sqrt{(x-2)^2 + (x-8)^2}$ e $\overline{A'P} = \sqrt{(x-8)^2 + (x-2)^2}$. Logo, $\overline{AP} = \overline{A'P}$.

Determinando o vetor $\overrightarrow{AA'} = (8,2) - (2,8) = (6,-6)$ conclui-se que a reta AA' tem declive

$$m' = -\frac{6}{6} = -1$$

Como a bissetriz dos quadrantes ímpares tem declive $m = 1$ podemos concluir que
$[AA']$ é perpendicular a $y = x$

Raciocinando analogamente, concluímos também que, dado um ponto qualquer A do gráfico de g de coordenadas (x, y), o ponto A' de coordenadas (y, x), pertence ao gráfico da função inversa de g, é simétrico de A relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

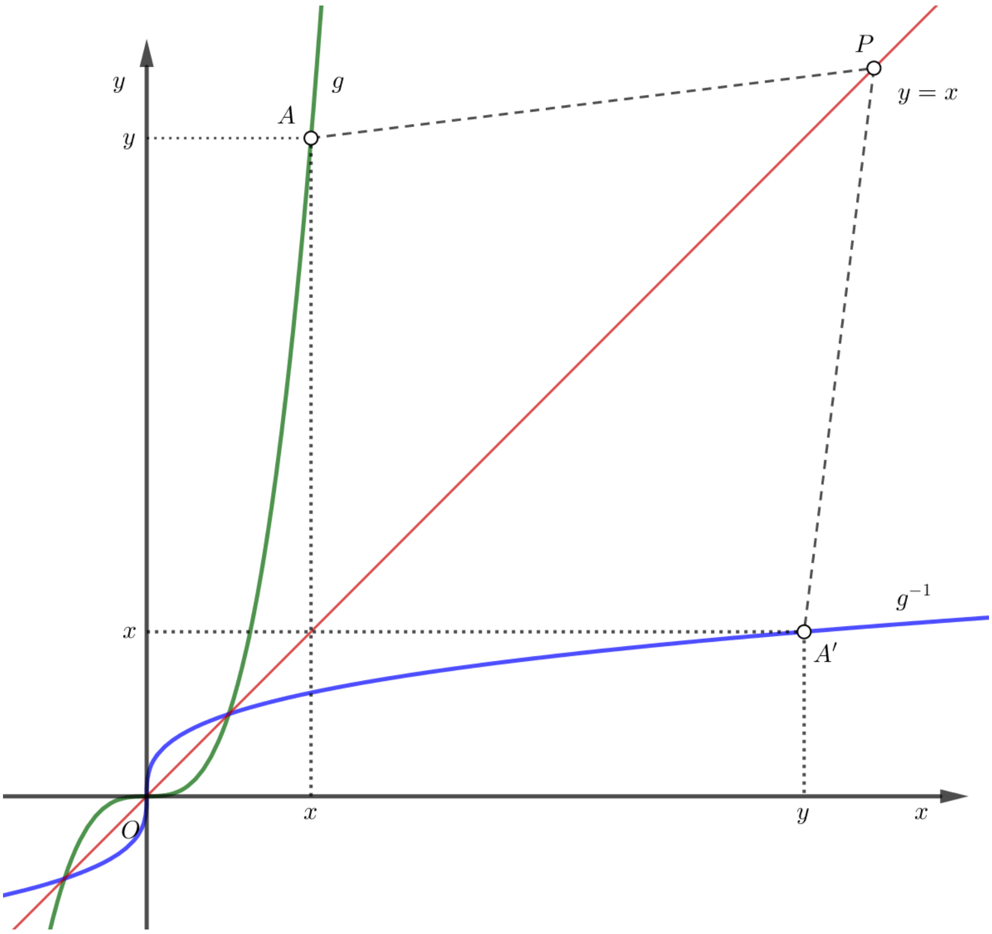


Figura 2

Generalização da investigação

Considera uma função f que verifica as condições seguintes:

f: $[-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ bijetiva e um ponto $A(a, f(a)), a \geq -1$.

f^{-1}: $[0, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$, inversa de f e A' o ponto do gráfico de f^{-1} que tem por abcissa $f(a)$.

Será que a conclusão a que chegaste anteriormente também se aplica agora?

Prova a tua conclusão.

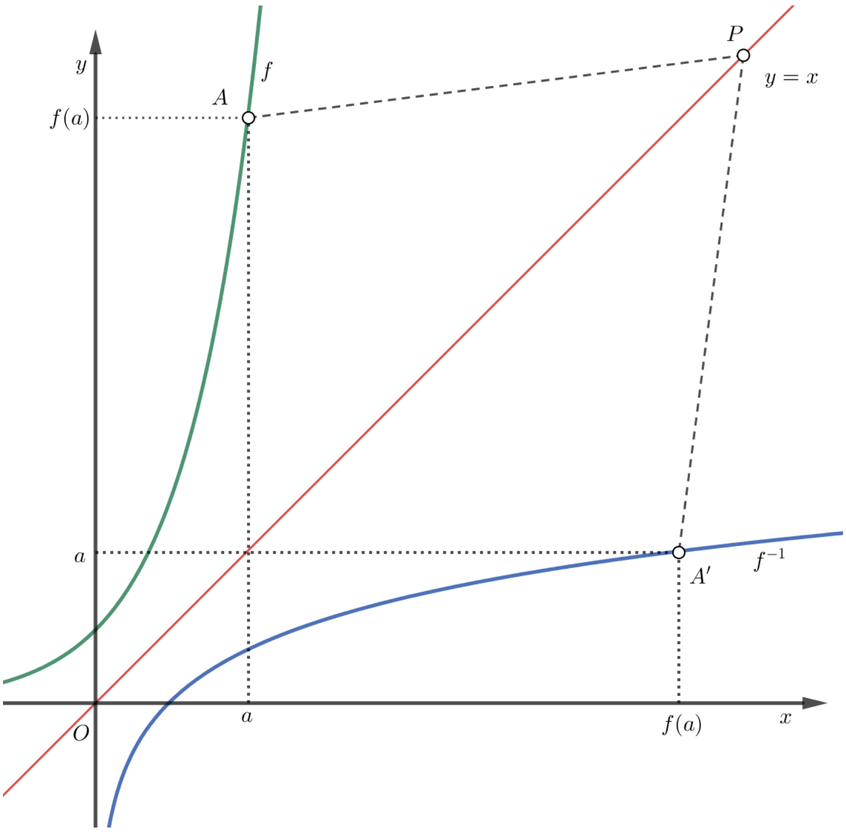


Figura 3

Desenvolvimento

- $\overline{AP} = \overline{A'P}$?

$$\overline{AP} = \sqrt{(x-a)^2 + (x - f(a))^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - 2f(a)x + f(a)^2} =$$

$$= \sqrt{2x^2 - 2ax - 2f(a)x + a^2 + f(a)^2}$$

$$\overline{A'P} = \sqrt{(x - f(a))^2 + (x - a)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2f(a)x + f(a)^2 + x^2 - 2ax + a^2} =$$

$$= \sqrt{2x^2 - 2ax - 2f(a)x + a^2 + f(a)^2}$$

- $[AA']$ é perpendicular a $y = x$?

$$\overrightarrow{A\,A'} = (a, f(a)) - (f(a), a) = (a - f(a), f(a) - a)$$

Logo, a reta AA' tem declive:

$$m' = \frac{f(a) - a}{a - f(a)} = -\frac{f(a) - a}{f(a) - a} = -1$$

Chegámos à conclusão pretendida, i.e., os pontos A e A' são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Que se pode dizer da posição dos gráficos de f e f^{-1} relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares?

Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Medindo a abertura da Parábola

Consideremos as parábolas de equação:

$y=2(x-2)^2+1$; $y=5(x-3)^2+1$; $y=3x^2-6x+4$

Para cada uma das parábolas, determine as coordenadas do vértice e a distância entre os pontos A e B, sabendo que estes resultam da interseção da parábola com a reta de equação $y = y_V + 1$.

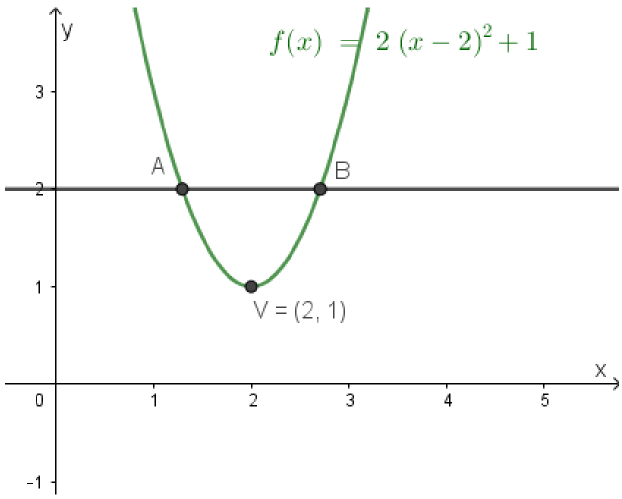
Investigação

De que modo o valor obtido para a distância entre os pontos A e B nas parábolas consideradas, se relaciona com os parâmetros que definem a equação da parábola? Que nome podemos dar à distância entre os dois pontos?

Desenvolvimento

- As coordenadas do vértice da parábola de equação $y=2(x-2)^2+1$ são $(2,\ 1)$.

  Sejam A e B os pontos que resultam da interseção dessa parábola com a reta de equação $y = y_v + 1 = 2$.



Então, tem-se:

$$2(x-2)^2+1=2 \Leftrightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow (x-2)^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-2=-\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x-2=\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x-2=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=2-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Daqui resulta que,

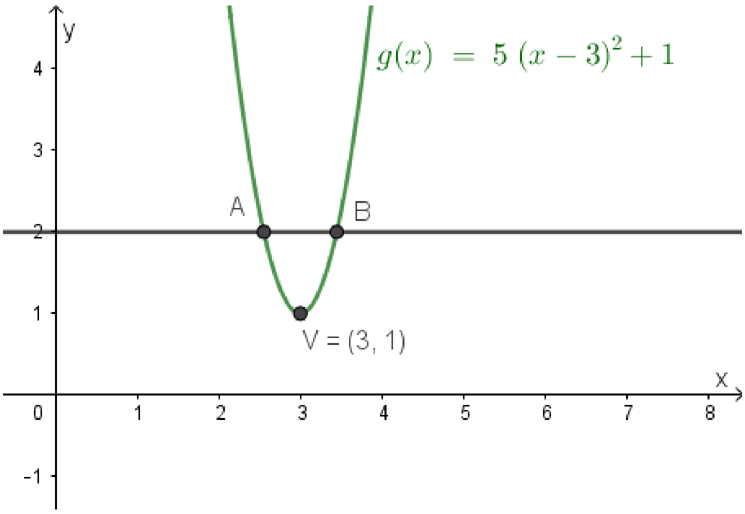
$$A\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2},2\right) \text{ e } B\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$$

Logo,

$$\overline{AB} = \left|2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \left|\frac{2\sqrt{2}}{2}\right| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

- As coordenadas do vértice parábola de equação $y = 5(x-3)^2 + 1$ são $(2,\ 1)$.

  Sejam A e B os pontos que resultam da interseção dessa parábola com a reta de equação $y = y_v + 1 = 2$.



Então, tem-se:

$$5(x-3)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow 5(x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{\frac{1}{5}} \vee x - 3 = \sqrt{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = -\frac{\sqrt{5}}{5} \vee x - 3 = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow x = 3 - \frac{\sqrt{5}}{5} \vee x = 3 + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Daqui resulta que,

$$A\left(3 - \frac{\sqrt{5}}{5}, 2\right) \text{ e } B\left(3 + \frac{\sqrt{5}}{5}, 2\right)$$

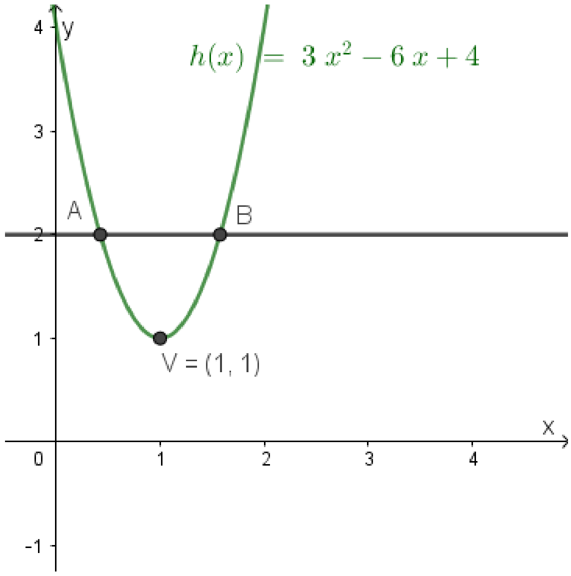
Logo,

$$\overline{AB} = \left|3 + \frac{\sqrt{5}}{5} - \left(3 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right| = \left|\frac{2\sqrt{5}}{5}\right| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- Calculemos agora as coordenadas do vértice da parábola de equação $y = 3x^2 - 6x + 4$.

$$\left(-\frac{-6}{2 \times 3}, \frac{(-6)^2 - 4 \times 3 \times 4}{4 \times 3}\right) = (1, -1)$$

Sejam A e B os pontos que resultam da interseção dessa parábola com a reta de equação $y = y_v + 1 = 2$.



Então, tem-se:

$$3x^2 - 6x + 4 = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}\, x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

Daqui resulta que,

$$A\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, 2\right) \text{ e } B\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, 2\right)$$

Logo,

$$\overline{AB} = \left|\frac{3+\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Conclusão:

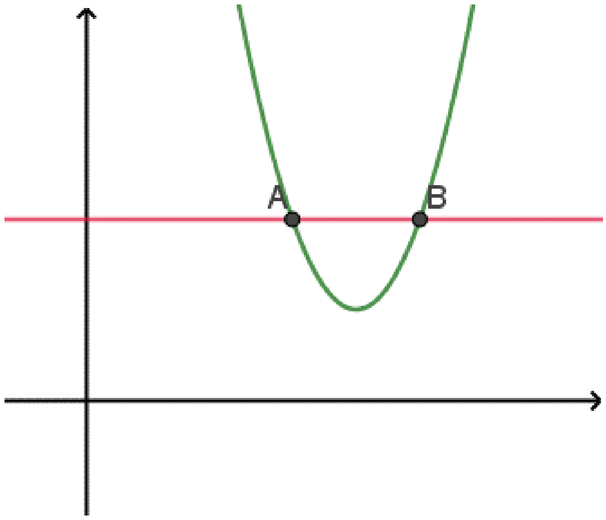
Após os cálculos efetuados, para cada uma das parábolas consideradas, verificou-se que a distância entre os pontos A e B depende do coeficiente do termo de grau 2, ou seja, do parâmetro $\boldsymbol{a}$.

Generalização da investigação

Considere uma parábola definida pela equação $y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$. Se convencionarmos "medir" a abertura da parábola como sendo a distância entre A e B, pontos de interseção da parábola com a reta de equação $y = y_V + 1$, mostre que este valor é sempre igual a $\frac{2\sqrt{a}}{a}$.

Desenvolvimento

Podemos convencionar que a abertura da parábola é dada pela distância entre dois dos seus pontos de ordenada igual a 1.



Sejam, então, A e B os pontos que resultam da interseção da parábola com a reta de equação $y_v + 1$.

Dado que $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, tem-se que:

$$ax^2 + bx + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = -b^2 + 4ac + 4a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4ab \pm \sqrt{(4ab)^2 - 4(4a^2)(b^2 - 4a)}}{8a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4ab \pm \sqrt{16a^2b^2 - (16a^2)(b^2 - 4a)}}{8a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4ab \pm \sqrt{16a^2b^2 - 16a^2b^2 + 64a^3}}{8a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4ab \pm 8a\sqrt{a}}{8a^2} \Leftrightarrow x = \frac{4a\left(-b \pm 2\sqrt{a}\right)}{8a^2} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm 2\sqrt{a}}{2a}$$

Daqui resulta que:

$$A\left(\frac{-b - 2\sqrt{a}}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + 1\right) \text{ e } B\left(\frac{-b + 2\sqrt{a}}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + 1\right)$$

Logo,

$$\overline{AB} = \left|\frac{-b - 2\sqrt{a}}{2a} - \frac{-b + 2\sqrt{a}}{2a}\right| = \left|\frac{-b - 2\sqrt{a} + b - 2\sqrt{a}}{2a}\right| = \left|\frac{-4\sqrt{a}}{2a}\right|$$

$$= \left|\frac{-2\sqrt{a}}{a}\right| = \frac{2\sqrt{a}}{a}$$

Conclusão:

Se convencionarmos "medir" a abertura de uma parábola, de equação $y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$, como sendo a distância entre A e B, pontos de interseção da reta de equação $y = y_V + 1$ com essa parábola, o valor da abertura da parábola é igual a $\frac{2\sqrt{a}}{a}$.

Variação da investigação

Considere uma parábola definida pela equação $y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$. Se convencionarmos "medir" a abertura da parábola como sendo a distância entre os pontos A e B da parábola de ordenada $y = y_V + k$, em que k é um número real positivo, qual será o valor da abertura da parábola?

Desenvolvimento

Sejam A e B os pontos que resultam da interseção da parábola com a reta de equação $y = y_V + k$.

Dado que $y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + k &\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \\
&= -b^2 + 4ac + 4ak \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 - 4ak = 0 & \\
\Leftrightarrow x = \frac{-4ab \pm \sqrt{(4ab)^2 - 4(4a^2)(b^2 - 4ak)}}{8a^2} & \\
\Leftrightarrow x = \frac{-4ab \pm \sqrt{16a^2b^2 - (16a^2)(b^2 - 4ak)}}{8a^2} \Leftrightarrow & \\
\Leftrightarrow x = \frac{-4ab \pm \sqrt{16a^2b^2 - 16a^2b^2 + 64a^3k}}{8a^2} \Leftrightarrow & \\
\Leftrightarrow x = \frac{-4ab \pm 8a\sqrt{ak}}{8a^2} \Leftrightarrow x = \frac{4a\left(-b \pm 2\sqrt{ak}\right)}{8a^2} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm 2\sqrt{ak}}{2a} &
\end{aligned}$$

Daqui resulta que $A\left(\frac{-b-2\sqrt{ak}}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a} + k\right)$ e $B\left(\frac{-b+2\sqrt{ak}}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a} + k\right)$

Logo,

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \left|\frac{-b - 2\sqrt{ak}}{2a} - \frac{-b + 2\sqrt{ak}}{2a}\right| = \left|\frac{-b - 2\sqrt{ak} + b - 2\sqrt{ak}}{2a}\right| \\
&= \left|\frac{-4\sqrt{ak}}{2a}\right| = \frac{2\sqrt{ak}}{a}
\end{aligned}$$

Conclusão:

Se convencionarmos "medir" a abertura de uma parábola, de equação $y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$, como sendo a distância entre os pontos A e B dessa parábola de ordenada $y_v + k$, em que k é um número real positivo, o valor da abertura da parábola é igual a $\frac{2\sqrt{ak}}{a}$.

O vértice das parábolas

Seja F a família de funções definidas por $F(x) = x^2 + bx + 1, b \in \mathbb{R}$.

Qual é a influência do parâmetro b no gráfico das funções que se obtêm para os diferentes valores de b?

Investigação

Variando o valor de b, determine e represente, num referencial, os zeros e os vértices das representações gráficas da função que se obtêm para cada valor de b.

Desenvolvimento

- Considerando $b = -2$ obtém-se $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Calculemos os zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Já sabemos que o gráfico da função é uma parábola, com a curva virada para cima, que passa no ponto $V_1(1,0)$ que é o seu vértice.

- Considerando $b = 2$ obtém-se $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

Calculemos os zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Já sabemos que o gráfico da função é uma parábola, com a curva virada para cima, que passa no ponto $V_2(-1,0)$, que é o seu vértice.

- Considerando $b = 0$ vamos obter $f(x) = x^2 + 1$

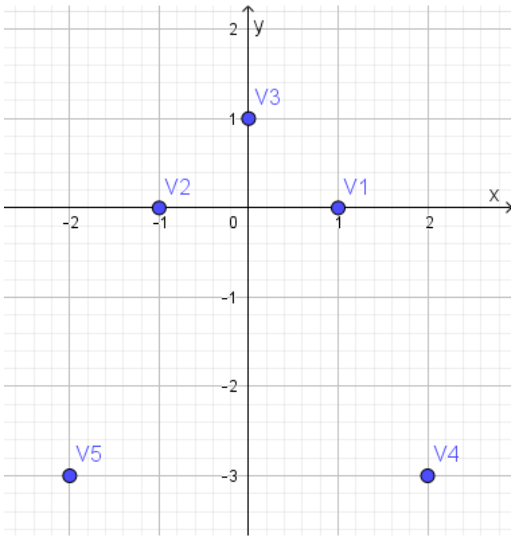
Recordemos que o vértice da parábola pode ser obtido através de

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Então, neste caso temos:

$$-\frac{b}{2a} = 0 \text{ e } -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4}{4} = -1$$

Portanto $V_3(0, -1)$.



Vejamos mais dois casos.

• Considerando $b = -4$ vamos obter $f(x) = x^2 - 4x + 1$

Teremos então:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2 \text{ e}$$

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{16 - 4}{4} = -3$$

Portanto $V_4(2, -3)$.

• Considerando $b = 4$ vamos obter $f(x) = x^2 + 4x + 1$

Teremos então:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2 \text{ e } -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{16 - 4}{4} = -3$$

Portanto $V_5(-2, -3)$.

Generalização

Considerando um valor qualquer para o parâmetro *b*, investigue a influência do parâmetro *b* na localização do vértice da representação gráfica de *f*

Desenvolvimento

Considerando $f(x) = x^2 + bx + 1, b \in R$, calculemos os zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + bx + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4}}{2} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}$$

- Se $b^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow b \in]-2,2[$, a função não tem zeros

- Se $b^2 - 4 = 0$, a função tem apenas um zero, ou seja, se $b = -2 \vee b = 2$ o zero será

$$x = \frac{-b}{2}$$

  E as coordenadas do vértice serão $V(1,0)$ quando $b = -2$ ou $V(-1,0)$ quando $b = 2$.

- Se $b^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow b \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ a função tem dois zeros.

Como já vimos anteriormente

$$V\left(-\frac{b}{2}, -\frac{b^2 - 4}{4}\right)$$

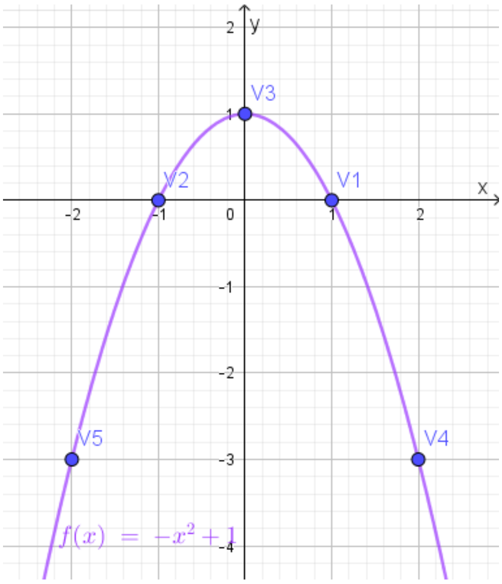
Se

$$x = -\frac{b}{2} \Leftrightarrow b = -2x$$

então, a ordenada do vértice será

$$y = -\frac{(-2x)^2 - 4}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{4x^2 - 4}{4} \Leftrightarrow$$
$$y = -x^2 + 1$$

Donde, $V(x, -x^2 + 1)$.



Podemos concluir que os vértices das parábolas também definem uma parábola de equação $y = -x^2 + 1$.

Extensão

Se tivéssemos $F(x) = x^2 + bx + c$, com b e $c \in \mathbb{R}$, qual é a influência que os parâmetros têm na localização dos vértices das representações gráficas das diferentes funções desta família?

Sendo

$$V\left(-\frac{b}{2}, -\frac{b^2 - 4c}{4}\right)$$

O que podíamos dizer do vértice?

Se

$$x = -\frac{b}{2} \Leftrightarrow b = -2x$$

então, a ordenada do vértice será

$$y = -\frac{(-2x)^2 - 4c}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{4x^2 - 4}{4} \Leftrightarrow y = -x^2 + c$$

Logo, $V(x, -x^2 + c)$.

Podemos concluir que os vértices das parábolas, que representam graficamente as funções da família considerada, definem uma família de parábolas de equação $y = -x^2 + c$, com $c \in \mathbb{R}$, com a curvatura voltada para baixo e cujos vértices são da forma $V_c(0, c)$.

Combinatória/Probabilidades

Polígonos a partir de polígonos

Considere o triângulo equilátero $[ABC]$ em que em cada um dos seus lados são colocados 3 pontos como se sugere na Figura 1.

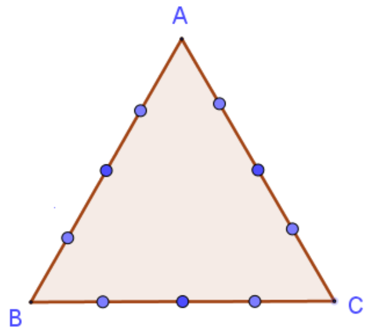


Figura 1

Quantos polígonos convexos se podem definir utilizando pelo menos um dos pontos colocados em cada um dos lados do triângulo?

Desenvolvimento

O número de polígonos que se podem definir, nas condições apresentadas, pode ser determinado considerando quatro casos.

Caso 1: Selecionando um ponto em cada lado do triângulo.

Neste caso, podemos obter 3^3 polígonos.

Caso 2: Selecionando um ponto em dois lados do triângulo e dois pontos no outro lado.

Neste caso, podemos obter ${}^3C_1 \times 3^2 \times \left({}^3C_2\right)^1$ polígonos.

Caso 3: Selecionando um ponto num lado do triângulo e dois pontos nos outros dois lados.

Neste caso, podemos obter ${}^3C_2 \times 3^1 \times \left({}^3C_2\right)^2$ polígonos.

Caso 4: Selecionando dois pontos em cada um dos três lados do triângulo.

Neste caso, podemos obter $\left({}^3C_2\right)^3$ polígonos.

Assim, de acordo com as condições estabelecidas, no total podem ser definidos:

$$3^3 + {}^3C_1 \times 3^2 \times \left({}^3C_2\right)^1 + {}^3C_2 \times 3^1 \times \left({}^3C_2\right)^2 + \left({}^3C_2\right)^3 = \left(3 + {}^3C_2\right)^3 = 216 \text{ polígonos}$$

Investigação

Considere um triângulo equilátero $[ABC]$ no qual, em cada um dos seus lados, são colocados n pontos (não coincidentes com os vértices), com $n \geq 2$.

Quantos polígonos convexos se podem formar com os n pontos colocados nos lados do triângulo, selecionando pelo menos um ponto em cada um dos seus lados?

Desenvolvimento

O número de polígonos convexos que se podem definir, nas condições apresentadas, pode ser determinado considerando os quatro casos acima referidos e corresponde ao valor da seguinte expressão

$$ {}^{n}C_1 \times {}^{n}C_1 \times {}^{n}C_1 + {}^{3}C_1 \times {}^{n}C_2 \times {}^{n}C_1 \times {}^{n}C_1 + {}^{3}C_2 \times {}^{n}C_2 \times {}^{n}C_2 \times {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 \times {}^{n}C_2 \times {}^{n}C_2 $$

que é equivalente à expressão

$$ n^3 + {}^{3}C_1 \times {}^{n}C_2 \times n^2 + {}^{3}C_2 \times ({}^{n}C_2)^2 \times n + ({}^{n}C_2)^3 $$

e que corresponde ao desenvolvimento, pelo Binómio de Newton, de $(n + {}^{n}C_2)^3$.

Conclusão

O número de polígonos convexos que se podem formar com os n pontos (não coincidentes com os vértices) colocados em cada um dos lados de um triângulo equilátero (com $n \geq 2$), selecionando pelo menos um ponto em cada um dos seus lados, é igual ao valor do binómio

$$ (n + {}^{n}C_2)^3 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^3. $$

Variação da investigação

Considere um quadrado $[ABCD]$ no qual, em cada um dos seus lados, são colocados n pontos (não coincidentes com os vértices), com $n \geq 2$.

Quantos polígonos convexos se podem formar com os n pontos colocados nos lados do quadrado, selecionando pelo menos um ponto em cada um dos seus lados?

Desenvolvimento

O número de polígonos que se podem definir, nas condições apresentadas, pode ser determinado considerando cinco casos.

Pode selecionar-se um ponto em cada lado, dois pontos num lado e um ponto em cada um dos outros três, dois pontos em dois lados e um ponto em cada um dos restantes dois lados, dois pontos em três dos lados e um ponto no lado restante ou selecionando dois pontos em cada um dos quatro lados.

Tal abordagem permite-nos obter a expressão

$$({}^{n}C_1)^4 + {}^{4}C_1 \times ({}^{n}C_1)^3 \times {}^{n}C_2 + {}^{4}C_2 \times ({}^{n}C_1)^2 \times ({}^{n}C_2)^2 + {}^{4}C_3 \times {}^{n}C_1 \times ({}^{n}C_2)^3 + ({}^{n}C_2)^4$$

que equivale a

$$n^4 + {}^{4}C_1 \times n^3 \times {}^{n}C_2 + {}^{4}C_2 \times n^2 \times ({}^{n}C_2)^2 + {}^{4}C_3 \times n \times ({}^{n}C_2)^3 + ({}^{n}C_2)^4$$

e que corresponde ao desenvolvimento, pelo Binómio de Newton, de $(n + {}^{n}C_2)^4$.

Conclusão

O número de polígonos convexos que se podem formar com os n pontos (não coincidentes com os vértices) colocados em cada um dos lados de um quadrado (com $n \geq 2$), selecionando pelo menos um ponto em cada um dos seus lados, é igual ao valor do binómio

$$(n + {}^{n}C_2)^4 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^4.$$

Extensão da investigação

Considere um polígono regular com k lados no qual, em cada um dos seus lados, são colocados n pontos (não coincidentes com os vértices), com $n \geq 2$.

Quantos polígonos convexos se podem formar com os n pontos colocados nos lados do polígono regular com k lados, selecionando pelo menos um ponto em cada um dos seus lados?

Desenvolvimento

O número de polígonos convexos que se podem formar, nas condições enunciadas, corresponde ao número de maneiras diferentes de, em cada um dos k lados de um polígono regular, escolher no mínimo um dos $\boldsymbol{n}$ pontos e no máximo escolher dois pontos.

A expressão que nos dá esse resultado é:

$$n^k + {}^kC_1 \times n^{k-1} \times {}^nC_2 + {}^kC_2 \times n^{k-2} \times ({}^nC_2)^2 + \cdots + {}^kC_{k-1} \times n^1 \times ({}^nC_2)^{k-1} + ({}^nC_2)^k$$

e corresponde ao desenvolvimento, pelo Binómio de Newton, de $(n + {}^nC_2)^k = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^k$.

Conclusão

O número de polígonos convexos que se podem formar com n pontos (não coincidentes com os vértices) colocados nos lados de um polígono regular com k lados (com $n \geq 2$), selecionando pelo menos um ponto em cada um dos seus lados, é igual ao valor do binómio

$$(n + {}^nC_2)^k = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^k.$$

Ora bolas!

Num saco existem dez bolas indistinguíveis ao tato: duas bolas amarelas, três bolas brancas e cinco bolas castanhas. Considere-se, ainda, que as bolas estão numeradas de 1 a 10.

Situação A Retiram-se as dez bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila.
Qual é a probabilidade de as bolas amarelas não ficarem juntas?

Desenvolvimento

Consideremos o acontecimento A: "As bolas amarelas não ficam juntas". A probabilidade referida pode obter-se pela expressão $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, em que $\bar{A}$ designa o acontecimento contrário de A, nomeadamente, "as bolas amarelas ficam juntas".

Ora, as duas bolas amarelas podem ficar juntas numa fila com 10 lugares de $9 \times 2! \times 8!$ maneiras diferentes, em que 9 representa o número de posições na fila das bolas amarelas, mantendo a posição relativa entre si; 2! representa o número de permutações das bolas amarelas entre si e 8! representa o número de permutações das bolas não amarelas entre si. O número de filas que é possível formar com estas bolas é 10! visto que estas, estando numeradas, são diferentes.

Então, $P(A) = 1 - \frac{9 \times 2! \times 8!}{10!}$, ou seja, $P(A) = 1 - \frac{2! \times 9!}{10!}$. Simplificando, $P(A) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{4}{5}$.

Generalização

Pensemos numa experiência aleatória análoga à precedente, ainda com bolas de três cores, mas, agora, com a bolas amarelas, b bolas brancas e c bolas castanhas.

Enunciar um problema semelhante ao da situação A e apresentar uma possível solução.

Tratando-se de uma experiência aleatória análoga à da situação A, com novas condições, poderíamos enunciar o problema do seguinte modo: Num saco existem bolas indistinguíveis ao tato: a bolas amarelas, b bolas brancas e c bolas castanhas. Considere-se, ainda, que as bolas estão numeradas de 1 a $a + b + c$. Retiram-se as $a + b + c$ bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila. Qual é a probabilidade de as bolas amarelas não ficarem juntas?

Desenvolvimento

Consideremos o acontecimento A: "As bolas amarelas não ficam juntas". A probabilidade referida pode obter-se pela expressão $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, em que $\bar{A}$ designa o acontecimento contrário de A, nomeadamente, "as bolas amarelas ficam juntas".

Ora, as a bolas amarelas podem ficar juntas numa fila com $a + b + c$ lugares de quantas maneiras diferentes? De $(b + c + 1) \times a! \times (b + c)!$ maneiras diferentes, em que $b + c + 1$ representa o número de posições na fila das bolas amarelas, mantendo a posição relativa entre si; $a!$ representa o número de permutações das bolas amarelas entre si e $(b + c)!$ representa o número de permutações das bolas não amarelas entre si. O número de filas que é possível formar com estas bolas é $(a + b + c)!$ visto que estas, estando numeradas, são diferentes.

Então,

$$P(A) = 1 - \frac{(b + c + 1) \times a! \times (b + c)!}{(a + b + c)!}$$

Simplificando,

$$P(A) = 1 - \frac{a! \times (b + c + 1)!}{(a + b + c)!}$$

Nova generalização

Admitamos que no saco existem bolas de k cores diferentes, nomeadamente, c_1 bolas de uma cor, c_2 bolas de outra cor, ..., e c_k bolas de outra cor.

Enunciar um problema análogo ao da situação A e apresentar uma possível solução.

Por analogia com a experiência aleatória da situação A, com as novas condições, poderíamos enunciar o problema do seguinte modo: Num saco existem bolas indistinguíveis ao tato: c_1 bolas da cor 1, c_2 bolas da cor 2, ..., e c_k bolas da cor k. Considere-se, ainda, que as bolas estão numeradas de 1 a $c_1 + c_2 + \cdots + c_k$. Retiram-se as $c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila. Qual é a probabilidade de as bolas de uma cor, digamos, a cor 1, não ficarem juntas?

Desenvolvimento

Consideremos o acontecimento A: "As bolas da cor 1 não ficam juntas". A probabilidade referida pode obter-se pela expressão $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, em que $\bar{A}$ designa o acontecimento contrário de A, nomeadamente, "as bolas da cor 1 ficam juntas".

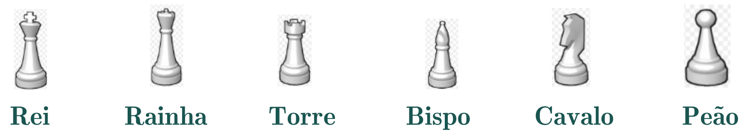
Ora, as c_1 bolas da cor 1 podem ficar juntas numa fila com $c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ lugares de quantas maneiras diferentes? De $(c_2 + c_3 + \cdots + c_k + 1) \times c_1! \times (c_2 + c_3 + \cdots + c_k)!$ maneiras diferentes, em que $c_2 + c_3 + \cdots + c_k + 1$ representa o número de posições na fila das bolas da cor 1, mantendo a posição relativa entre si; $c_1!$ representa o número de permutações das bolas da cor 1 entre si e $(c_2 + c_3 + \cdots + c_k)!$ representa o número de permutações das bolas que não têm a cor 1 entre si. O número de filas que é possível formar com estas bolas é $(c_1 + c_2 + \cdots + c_k)!$ visto que estas, estando numeradas, são diferentes.

Então,

$$P(A) = 1 - \frac{c_1! \times (c_2 + c_3 + \cdots + c_k + 1)!}{(c_1 + c_2 + \cdots + c_k)!}$$

Peças e mais peças…

Um jogo de xadrez é constituído por um tabuleiro e 32 peças, 16 brancas e 16 pretas. Para cada cor, existe um rei, uma rainha, duas torres (iguais), dois bispos (iguais), dois cavalos (iguais) e oito peões (iguais).



Situação inicial

Na Figura 1, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais (A,B,C,D) e em quatro filas verticais (1,2,3,4).

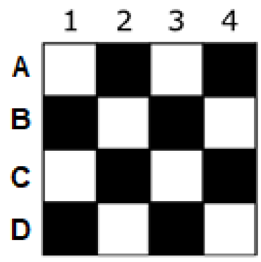


Figura 1

Pretende-se dispor as 5 peças de xadrez, apresentadas na Figura 2, no tabuleiro de modo que cada peça ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma peça.

Como se pode observar, as 5 peças são todas brancas, sendo um Bispo, uma Torre, um Cavalo e 2 peões.

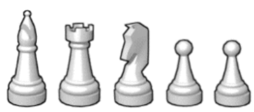


Figura 2

De quantas formas diferentes é possível dispor as 5 peças no tabuleiro?

Desenvolvimento

$$^{16}A_3 \times {}^{13}C_2 = 262\,080$$

Investigação

Na Figura 3, está representado um tabuleiro com 50 casas, dispostas em 5 filas horizontais (A,B,C,D,E) e em 10 filas verticais (1,2,3,4,...,10).
Sabe-se que cinco peças de xadrez, todas de cor branca, podem ser dispostas no tabuleiro de 42 375 200 formas distintas.
Investigue que tipologias podem ter as 5 peças (número de peças iguais e número de peças distintas) e se a solução encontrada é única.

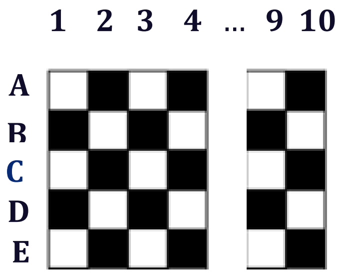


Figura 3

Desenvolvimento

Tipologia das peças	Cálculos
5 peças diferentes	$^{50}A_5 = 254\,251\,200$
2 peças iguais e 3 diferentes	$^{50}C_5 \times {}^{48}A_3 = 127\,125\,600$
3 peças iguais e 2 diferentes	$^{50}C_3 \times {}^{47}A_2 = 42\,375\,200$
4 peças iguais e 1 diferente	$^{50}C_4 \times 46 = 10\,593\,800$
5 peças iguais	$^{50}C_5 = 2\,118\,760$
2 grupos de 2 peças iguais e 1 peça diferente (por exemplo, 2 torres, 2 bispos e 1 peão)	$^{50}C_2 \times {}^{48}C_2 \times 46 = 63\,562\,800$
1 grupo de 2 peças iguais e 1 grupo de 3 peças iguais (por exemplo, 2 cavalos e 3 bispos)	$^{50}C_2 \times {}^{48}C_3 = 21\,187\,600$

Conclusão

O grupo das 5 peças de xadrez deve ser formado por três peças iguais e por 2 peças diferentes, sendo esta a única solução.

Variação da investigação

Considere agora que ao tabuleiro representado na Figura 3 foram acrescentadas novas filas verticais, ficando o novo tabuleiro com um total de n filas verticais.

Sabe-se que cinco peças de xadrez, todas brancas, podem ser dispostas no tabuleiro de $\frac{3125}{4}n^5 - \frac{3125}{2}n^4 + \frac{4375}{4}n^3 - \frac{625}{2}n^2 + 30n$ formas distintas.

Investigue que tipologias podem ter as 5 peças (número de peças iguais e número de peças distintas) e se a solução encontrada é única.

Desenvolvimento

Tipologia das peças	Cálculos
5 peças diferentes	$^{5n}A_5 = 3125n^5 - 6250n^4 + 4375n^3 - 1250n^2 + 120n$
2 peças iguais e 3 diferentes	$^{5n}C_2 \times {}^{5n-2}A_3 = \frac{3125}{2}n^5 - 3125n^4 + \frac{4375}{2}n^3 - 625n^2 + 60n$
3 peças iguais e 2 diferentes	$^{5n}C_3 \times {}^{5n-3}A_2 = \frac{3125}{6}n^5 - \frac{3125}{3}n^4 + \frac{4375}{6}n^3 - \frac{625}{3}n^2 + 20n$
4 peças iguais e 1 diferente	$^{5n}C_4 \times 5n-4 = \frac{3125}{24}n^5 - \frac{3125}{12}n^4 + \frac{4375}{24}n^3 - \frac{625}{12}n^2 + 5n$
5 peças iguais	$^{5n}C_5 = \frac{625}{24}n^5 - \frac{625}{12}n^4 + \frac{875}{24}n^3 - \frac{125}{12}n^2 + n$
2 grupos de 2 peças iguais e 1 peça diferente (por exemplo, 2 torres, 2 bispos e 1 peão)	$^{5n}C_2 \times {}^{5n-2}C_2 \times 5n-4 = \frac{3125}{4}n^5 - \frac{3125}{2}n^4 + \frac{4375}{4}n^3 - \frac{625}{2}n^2 + 30n$
1 grupo de 2 peças iguais e 1 grupo de 3 peças iguais (por exemplo, 2 cavalos e 3 bispos)	$^{5n}C_2 \times {}^{5n-2}C_3 = \frac{3125}{12}n^5 - \frac{3125}{6}n^4 + \frac{4375}{12}n^3 - \frac{625}{6}n^2 + 10n$

Conclusão

O grupo das 5 peças de xadrez deve ser formado por dois grupos constituídos por 2 peças iguais (por exemplo 2 torres e 2 bispos), sendo esta a solução única.

Capítulo 2 – Tarefas investigativas: potencialidades e constrangimentos. Reflexões dos formandos.

Alda Silva

> **"Uma investigação matemática é sempre uma viagem ao desconhecido, pois embora já até possa ter sido feita por outros, dará ao aluno a oportunidade de fazer matemática do mesmo modo como os matemáticos o fazem; ele é quem decidirá o caminho a ser seguido." Nigel Langdon e Charles Snape in, "Viva a Matemática" (Editora Gradiva)**

Nas atividades tradicionais o professor desempenha um papel estruturante, são atividades nas quais o objetivo final está delineado, em que, na generalidade dos casos, o caminho a seguir está definido, nelas o papel do aluno é executar. Nas atividades de investigação, o aluno tem a responsabilidade de descobrir e justificar as suas descobertas e o papel do professor não é fornecer respostas, pelo contrário, é de desafiar os alunos a procurá-las por si próprios.

As atividades de investigação, centradas no aluno, permitem o desenvolvimento da sua autonomia e da sua capacidade de tomar decisões, avaliar e resolver problemas. Podendo ser desenvolvidas individualmente, considero que, num contexto de sala de aula, o trabalho de carácter investigativo deve ser concebido como trabalho colaborativo. A aprendizagem cooperativa é uma mais-valia neste tipo de atividades pois ajuda na construção do conhecimento e auxilia o desenvolvimento de diversas competências.

No *Perfil do Aluno* é explicitado o que se espera de um jovem à saída da escolaridade obrigatória. Optar por uma estratégia didática com recurso a investigação irá contribuir para a concretização da visão abrangente do aluno. A realização de atividades de investigação permite ao aluno participar ativamente na construção do seu conhecimento, o "aprender fazendo" desenvolve capacidades/competências de vários níveis, como, por exemplo, elaborar estratégias; construir conceitos; estabelecer conexões; trabalhar colaborativamente; desenvolver o espírito crítico, o pensamento matemático, a comunicação escrita e oral e estimular a autonomia, a resiliência e a argumentação.

A abordagem investigativa traz benefícios concretos no processo ensino-aprendizagem da Matemática, mas a sua aplicação não está livre de constrangimentos.

Além, dos suspeitos do costume, falta de tempo porque o programa é extenso, a barreira da avaliação externa,…, da resistência dos alunos devido ao seu desconforto perante uma atividade que requer uma participação mais ativa e que exige a mobilização de competências diferentes do habitual, o maior constrangimento, quanto a mim, é a minha(nossa) dificuldade enquanto professor(es) no planeamento de atividades com uma abordagem investigativa.

Os nossos receios começam a ser ultrapassados à medida que nós próprios investimos no tema. Existem diversos estudos académicos que nos podem ajudar e modelos de conceção de atividades investigativas. Um deles, é o modelo dos 5 E´s, definido por Rodger Bybee, que apresenta uma série de instruções divididas em cinco fases, a saber: envolvimento (Engage), exploração (Explore), explicação (Explain), elaboração (Elaborate) e avaliação (Evaluate) que ajudam na implementação de atividades investigativas.

Para a superação dos constrangimentos e a consequente alteração das práticas pedagógicas irão, também, contribuir fortemente o trabalho colaborativo, a formação e, na minha opinião, a consciência que, como defende João Pedro da Fonte, *"… investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado".*

Anabela Torres

Cada vez mais, os currículos escolares estão a apresentar atividades de natureza investigativa. Torna-se fundamental para a aprendizagem matemática dos alunos ao melhorar a organização e sedimentação dos conhecimentos e também para o desenvolvimento profissional do professor. Nesta atividade, o aluno formula questões, testa, prova conjeturas e argumentos, apresenta resultados, discute-os com os colegas e professores, melhorando a sua capacidade de argumentação. Cria uma maior independência em relação ao professor aumentando a autonomia do estudante.

Potencialidades

À partida, todos os professores estão de acordo em que esta metodologia poderá melhorar a compreensão e potencialidade da matemática por parte dos alunos. Desenvolve o seu pensamento matemático através de processos menos formais, a matemática surge naturalmente através de tentativas, erros e suas correções, melhora o domínio dos conhecimentos adquiridos tornando a aprendizagem mais significativa e estruturada, e aumenta a competência na resolução de muitos problemas do dia-a-dia, podendo extrair conceitos matemáticos de situações concretas. Os especialistas em educação enfatizam um maior desenvolvimento de vários aspetos por parte dos alunos: criatividade, iniciativa, autoconfiança.

Constrangimentos

É claro que, todas estes procedimentos levantam algumas questões que devem ser colocadas logo de início, sob pena de não se conseguir avançar e atingir os objetivos últimos que são: levar o aluno à descoberta de novos saberes, por meio de problemas abertos, os quais propiciarão o levantamento de conjeturas possíveis de serem testadas e matematicamente registadas.

Assim, poderemos enumerar algumas destas dificuldades, que começam logo pela preparação das tarefas (questões) pelo professor, de forma a atingir os objetivos, os quais devem ser claramente definidos, da maneira mais adequada, o que vai exigir algum tempo de pesquisa pelos vários materiais de apoio.

No que se refere aos alunos, há que pensar logo de início, na gestão do tempo disponível para a atividade, tendo sempre em atenção outros aspetos como trabalho individual ou em grupo, como promover e incrementar a participação dos alunos através dos recursos disponíveis e tornar a tarefa interessante para ultrapassar dificuldades e resistência por parte dos alunos.

Por último, mas não menos importante, é necessário definir uma avaliação adequada e justa. Ter em conta o trabalho individual, a participação do aluno no grupo, a concretização da tarefa e caminhos para a executar, a aquisição de novos conhecimentos, a apresentação dos resultados.

É um desafio interessante e importante no ensino da matemática, mas que necessita da parte do professor, tempo para ser implementado como prática corrente.

Cristina Castro

O ensino eficaz da matemática e os processos que levam os alunos a conquistarem aprendizagens significativas é, sem qualquer dúvida, um dos propósitos que norteiam a planificação do trabalho dos professores da disciplina. Não é por acaso que a matemática é a disciplina da qual se fala nas notícias, já que um bom desempenho dos alunos nesta área, está normalmente associado a uma boa capacidade de interpretação, raciocínio lógico e abstrato, resolução de problemas e sentido analítico e crítico, que são competências imprescindíveis para as restantes áreas científicas e estruturantes para a maioria dos estudantes.

Ainda assim, apesar de todos os holofotes lhe estarem apontados, os caminhos que levam ao sucesso dos alunos na disciplina de matemática não são totalmente claros e as sucessivas mudanças, impostas pela tutela, baseiam-se mais em divergências ideológicas por parte dos investigadores ligados à educação matemática e menos na experiência de terreno. Não é possível implementar mudanças sem reequacionar o que se pretende que os alunos aprendam e como é possível garantir que essa aprendizagem seja real e consistente, tendo presente quais as reais fragilidades dos estudantes e quais as oportunidades para uma mudança que se venha a revelar profícua para a melhoria dos patamares de desempenho dos alunos.

É neste contexto que faz sentido pensar quais as metodologias que se revelam mais eficazes no trabalho com os alunos e que surge esta reflexão relativa à utilização de atividades de investigação na aula de matemática. Pessoalmente, sou muito favorável à sua implementação porque entendo que é o tipo de atividade que permite uma maior apropriação dos conceitos e dos procedimentos, permitindo ainda o desenvolvimento das competências já enunciadas e que são fundamentais para o desenvolvimento integral dos alunos, constituindo ferramentas que os irão acompanhar após o fim do seu percurso académico. Além disso, considero que a construção destas atividades por parte dos professores permite um ensino mais personalizado e ajustado à realidade de cada turma, possibilitando ainda a inclusão de propostas diferenciadas que garantam que todos os alunos encontrem, ao realizá-las, oportunidades efetivas para o seu desenvolvimento individual. No entanto, não utilizo este tipo de atividades com a frequência que desejaria uma vez que os alunos não estão muito habituados a esta metodologia, sendo difícil fazer a sua implementação consistente face à extensão dos programas que requerem que os vários conteúdos sejam lecionados de uma forma muito mais célere do que seria recomendável. Na minha experiência, os melhores momentos de implementação deste tipo de atividades aconteceram em contexto de avaliação, que proporciona um maior envolvimento dos alunos e um nível de dedicação às propostas muito mais elevado, mas gostava de conseguir integrá-las na minha prática de uma forma mais consistente.

Deste modo, em jeito de conclusão, penso que a utilização de tarefas investigativas em sala de aula deveria ser a norma, não só no ensino secundário, mas também ao longo do ensino básico,

para que os alunos se familiarizem, de forma gradual, com este tipo de trabalho. Para que tal seja possível, é importante que os currículos sejam atualizados, ajustados aos escalões etários e, no caso do ensino secundário, articulados de forma realista com o futuro académico dos alunos e com as respetivas saídas profissionais, de modo que seja possível desenvolver, em sala de aula, um trabalho com um ritmo mais adequado aos processos de aprendizagem. Neste contexto, penso que este tipo de atividades teria um lugar de destaque na aula de matemática, que passaria a ser muito mais centrada no aluno e no trabalho colaborativo entre pares. Isto permitiria abrir a porta à utilização de metodologias como a sala de aula invertida e à redefinição de estratégias de avaliação, já que com estas tarefas é possível incluir a avaliação por rúbricas ou descritores de desempenho, pelo que me parece que o futuro do ensino da matemática passará certamente por termos os alunos a investigar para aprender.

Dulce Gonçalves

A implementação de atividades investigativas apresenta inúmeros pontos fortes. O facto de ao aluno ser apresentada uma atividade que não segue um conjunto de procedimentos e regras com o objetivo de chegar a um único e previsível resultado, faz com que este tenha de desenvolver estratégias, escolher a linha de raciocínio a tomar, formular conjeturas e conseguir prová-las, mobilizando todos os conhecimentos que possui. Trata-se, portanto, da construção de conhecimento a um nível superior onde o aluno é o autor.

Além dos pontos fortes enumerados, é reforçada a autonomia e a capacidade de comunicação oral e escrita, seja no caso da atividade investigativa ser desenvolvida de forma individual, seja se for desenvolvida em grupo. Neste caso, acrescem, ainda, os pontos fortes inerentes a este tipo de trabalho, como sejam a cooperação, a integração, a troca de ideias, …

Em suma, a implementação de atividades investigativas nas atividades letivas, possibilitam que os alunos participem ativamente na construção do conhecimento matemático, ampliem os seus horizontes e trabalhem de forma muito criativa.

Do ponto de vista do professor, estas atividades requerem o acompanhamento do processo desenvolvido pelo aluno de uma forma muito mais próxima. O professor torna-se um companheiro de viagem, tendo também a seu cargo o lançamento de pistas para desbloquear possíveis bloqueios ou raciocínios incorretos.

No que aos constrangimentos diz respeito, começo por apontar o tamanho das turmas. A exigência de um acompanhamento mais próximo por parte do professor é comprometida pelo elevado número de alunos dentro da sala de aula. Por outro lado, estas atividades exigem bastante tempo para serem desenvolvidas. Enquanto os programas de Matemática mantiverem a dimensão e exigência atuais, mesmo que exista muito boa vontade do docente, será muito difícil desenvolver este tipo de trabalho em ambiente de sala de aula.

Poder-se-ia pensar em propor atividades investigativas a desenvolver no espaço exterior à sala de aula, mas, também aí, vejo o constrangimento de o trabalho poder não ser desenvolvido pelo aluno.

Termino, fazendo um balanço do trabalho desenvolvido nesta formação. Foi muito enriquecedor o processo de criação das atividades investigativas, tanto na abordagem em grande grupo, como na abordagem em pequenos subgrupos. Senti sempre que cada um, formandos e formador, deu fortes contributos na criação das atividades e que foram esses contributos que as tornaram mais completas e interessantes. Considero mesmo que todos nós nos conseguimos superar e que o produto do trabalho segue o preconizado por *Nigel Langdon e Charles Snape.*

"Uma investigação matemática é sempre uma viagem ao desconhecido, pois embora já até possa ter sido feita por outros, dará ao aluno a oportunidade de fazer matemática do mesmo modo como os matemáticos o fazem; ele é quem decidirá o caminho a ser seguido.

Qualquer um se sentirá como um detetive, pois começará com uma pista e terá que prosseguir sozinho, escolhendo a direção. Mesmo quando erra, encontra dificuldades, tem de guardar suas ideias e recomeçar. As investigações levarão o investigador a trabalhar de modo muito criativo em Matemática, pois muitas vezes as perguntas não o levarão a respostas, mas a outras perguntas, instigando o investigador a sempre procurar saber quais são as razões pelas quais as coisas acontecem".

Nigel Langdon e Charles Snape

Adaptação de "Viva a Matemática" (Editora Gradiva)

João Afonso

> Numa atividade de investigação, os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjeturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões. Qualquer tema de Matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de atividades de natureza investigativa (DEB, 2001, p.68)

Muitas são as potencialidades que podem advir no ensino da Matemática com a proposta de tarefas investigativas aos alunos. De facto, quando se propõe uma tarefa de natureza investigativa estaremos a propor ao aluno a possibilidade de desenvolver competências diferenciadas. A capacidade para investigar, explorar, conjeturar, raciocinar de forma lógica e desenvolver a aptidão para utilizar vários métodos matemáticos na resolução de problemas de natureza não rotineira, possibilitam a formação de cidadãos matematicamente competentes (Afonso, 2009). É nesse contexto e agora reforçado com os atuais documentos orientadores que se devem valorizar atividade de investigação desde os primeiros anos de escolaridade.

De facto, as tarefas de investigação fazem parte de uma listagem de experiências de aprendizagem em que todos os alunos devem ter oportunidade de se envolver, atividades essas em linha com a ideia de que aprender Matemática é fazer Matemática (NCTM, 1991) recorrendo a procedimentos próprios da investigação, como a generalização, estudo de casos particulares, modelação, comunicação, análise, exploração, conjetura e prova.

Contudo, a realização de tarefas de natureza investigativa, acarreta uma série de constrangimentos que começam desde logo na predisposição dos alunos. Estudos realizados (Tanner, 1989) revelam que os alunos envolvidos nesse tipo de trabalho preferem a realização de páginas seguidas de exercícios e que gostam de alguma segurança vinda pelo facto de chegarem a respostas certas. Para os alunos, a realização de investigações apenas está ao alcance dos mais dotados e que, portanto, nem todos conseguem realizá-las.

Quanto aos professores, nem todos se posicionam de igual modo face a tarefas de natureza investigativa. Para uns é interessante manter uma atitude investigativa e fazer explorações matemáticas, para outros essas atividades não despertam interesse especial. De modo geral, o facto de investigações seguirem caminhos imprevistos, faz com que os professores sintam alguma reserva na sua prática. Tal como Ponte et al (1998) afirmam, os professores têm dificuldade no apoio a prestar aos alunos sem os orientar demasiado ou apoiando-os por vezes

de menos. Tendo ainda dificuldade na promoção de discussão intermédia ou mesmo no final do trabalho realizado.

Fase a estes constrangimentos e atendendo às potencialidades que advém da prática de tarefas de natureza investigativa, o Departamento decidiu criar este círculo de estudos para que as tarefas de natureza investigativa se tornem mais frequentes na nossa prática docente. Face a tudo o que foi exposto, o balanço a fazer desta formação é francamente positivo, pela possibilidade do desenvolvimento profissional que proporcionou.

Bibliografia

Afonso, J. P. (2009). *Investigações Matemáticas com TIC no primeiro Ciclo do Ensino Básico*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa)

DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: Impresa Nacional.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H. , & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*, 8. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Tanner, H. (1989) Introducing Investigations. In Matthematics Teaching.

Sandra Afonso

Tendo em conta os documentos *Programa e Metas Curriculares para a disciplina de Matemática A do Ensino Secundário* e *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*, atualmente orientadores das práticas letivas, as atividades de natureza investigativa devem assumir um papel de relevo no ensino da Matemática.

Quando se propõem tarefas de natureza investigativa, estaremos a propor tarefas que rompem com práticas comuns num ensino essencialmente expositivo em que o professor assume um papel mais diretivo na transmissão de conhecimentos, procurando garantir que todos os adquirem na mesma forma. No âmbito de uma investigação matemática na sala de aula, procura-se proporcionar ao aluno a prática de um trabalho diferenciado que o levará a observar, a fazer escolhas e conjeturas, a confrontar pontos de vista e a integrar de saberes. O protagonismo do professor é assim bastante reduzido, ficando reservada para o aluno uma parte significativa do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento. O facto de os alunos tomarem contacto com este tipo de atividade permite-lhes desenvolver competências fundamentais, preconizadas no *Perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória*, como a capacidade de interpretar informação, planear e gerir pesquisas e projetos, tomar decisões para resolver problemas e ainda desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

Apesar dos benefícios inquestionáveis que este tipo de atividade pode trazer, não só à aprendizagem, mas também à formação integral de um aluno, existem igualmente constrangimentos na sua aplicabilidade.

Os docentes sentem, frequentemente, dificuldades em gerir o tipo de apoio a prestar aos alunos, no sentido de decidir a forma de fazer emergir os resultados que, supostamente, se pretendem. Para além disso, a imprevisibilidade das investigações e discussões de resultados podem gerar sentimentos de insegurança e de desconforto em alguns professores. A forma de avaliar os trabalhos produzidos pode também apresentar-se como uma dificuldade/constrangimento pela diversidade de abordagens possíveis. É também importante referir que o tempo despendido na realização deste tipo de atividades é, por vezes, sentido como um entrave ao cumprimento dos programas e não parece ter uma valorização imediata e direta, por exemplo nos instrumentos de avaliação externa.

Não é fácil criar atividades de investigação que, simultaneamente, sirvam o seu objetivo fundamental e a longo prazo de contribuir para a formação integral do aluno, sejam adequadas ao seu nível etário e de escolaridade e também à dimensão das turmas, permitam uma gestão

adequada da planificação e o cumprimento do programa da disciplina…e poderia continuar a enumerar outras tantas condições que seriam ideais na nossa prática letiva e certamente proporcionariam aos alunos a hipótese de realizarem aprendizagens verdadeiramente significativas.

Esta formação, para além de nos ter proporcionado a nós enquanto docentes também o prazer da descoberta e da investigação matemática e de nos ter feito, mais uma vez, refletir sobre as nossas práticas, mostrou-nos que é possível, em determinadas circunstâncias, realizar este tipo de atividades.

Teresa Prelhaz

A educação matemática, nas últimas décadas, tem sido objeto de diversos estudos a nível do ensino-aprendizagem, da didática e da formação de professores. Como resultado desse trabalho, as metodologias utilizadas no ensino-aprendizagem têm sofrido evoluções significativas, que não são, no entanto, consensuais.

Uma das práticas inovadoras que, de há uns anos a esta parte, vem a ser incentivada é a utilização de investigações e explorações matemáticas na sala de aula, podendo-se desde já afirmar que existem vantagens e constrangimentos à sua aplicação.

A utilização do trabalho investigativo por parte dos alunos permite-lhes desenvolver o espírito crítico, a autonomia e a capacidade de resolução de problemas. Este trabalho deixa de estar centralizado no professor, em práticas demasiado expositivas e de rotina que recorrem, sobretudo, à memorização. Ao realizar uma investigação matemática o aluno é obrigado a pensar, a escolher caminhos e a fazer conjeturas.

Este tipo de trabalho exige, do professor, um papel diferente do “tradicional”. O professor, neste modelo, tem de conseguir organizar as tarefas, envolver os alunos, tem de saber conduzir a comunicação, de estar preparado para orientar os cenários que vão sendo apresentados e monitorizar os diversos passos do trabalho dos alunos.

O trabalho colaborativo dos professores pode ser um elemento facilitador da aplicação do trabalho investigativo em sala de aula pois a dificuldade que pode surgir na criação e aplicação das tarefas pode ser minimizada quando trabalhada em conjunto.

Um dos problemas que se colocam ao professor prende-se com a avaliação das tarefas investigativas visto não ser possível aplicar o modelo de avaliação utilizado quando se desenvolve um trabalho menos inovador (resolução de exercícios, fichas e testes).

Além disso, os condicionalismos impostos pela extensão dos currículos e pela avaliação externa são algumas das contingências que podemos enumerar. Pode-se contar também com uma certa “resistência” por parte dos alunos que não estão habituados a realizar tarefas investigativas nem a recorrer às TIC, que podem ser um instrumento útil na resolução das mesmas.

Existem ainda fatores externos à escola que podem dificultar a implementação deste método de trabalho como, por exemplo, os explicadores cujo objetivo é a mecanização tendo em vista a realização dos testes e dos exames nacionais, e até alguns encarregados de educação que

defendem as práticas tradicionais, não perspetivando os benefícios que a realização das tarefas investigativas trazem para a formação do aluno enquanto ser humano pensante.

Como conclusão pode-se dizer que os métodos inovadores, nomeadamente as investigações e explorações matemáticas, são algo a realizar em sala de aula, pelos benefícios que trazem no desenvolvimento do raciocínio e na forma como os alunos encaram a Matemática. No entanto, um grande caminho tem ainda de ser percorrido com vista a dotar os professores de preparação para, face aos currículos em vigor, implementar, monitorização e avaliar tais tarefas. É também necessário que uma cultura matemática inovadora seja interiorizada pelos diversos intervenientes neste processo que é ENSINAR e APRENDER.

Vera Costa

No contexto atual de ensino, cada vez mais, nos é exigido que proporcionemos aos nossos alunos, atividades que lhes permitam, no âmbito da disciplina de Matemática A, “descobrir, raciocinar, provar e comunicar matemática”. Perante esta exigência, decidi frequentar a formação, Investigações no Ensino da Matemática, perspetivando que esta seria importante para o meu desenvolvimento profissional nesse âmbito.

No meu ponto de vista, a formação decorreu num clima de participação e empenho de todos os elementos do grupo. Considero que as tarefas produzidas foram pertinentes e o facto de ser possível a sua elaboração em conjunto, foi bastante positivo. Desta forma, os formandos tiveram a oportunidade de interagir, podendo partilhar os seus saberes teóricos e experienciais, complementados com a informação recebida pelo formador, o qual evidenciou um excelente domínio científico e foi muito colaborante em todas as sessões.

Destaco, ainda, o trabalho em pequeno grupo, o qual se revelou enriquecedor, pois foram promovidos momentos de reflexão e de discussão, sobressaindo um espírito de ajuda, de uns para com os outros, na concretização do trabalho solicitado.

Ao longo da formação, expuseram-se dificuldades e constrangimentos relativamente à operacionalização das tarefas produzidas, nomeadamente no que respeita ao nível da capacidade de abstração que é exigida em algumas delas. Possivelmente, ter-se-á que proceder à reformulação de algumas delas, no seu formato, e até mesmo, no seu conteúdo, adequando-as aos desempenhos diferenciados dos nossos alunos, para que cumpram o seu propósito matemático. No entanto, creio que todas as tarefas produzidas constituem uma boa base para o desafio da implementação da investigação no ensino da Matemática.

Saliento, ainda, que ter frequentado esta formação foi uma mais-valia, sobretudo pela oportunidade que tive em alargar a minha imaginação pedagógica no âmbito do ensino exploratório da Matemática. Até à presente data, não apliquei nenhuma das tarefas elaboradas, por limitações de tempo, mas futuramente, sempre que possível e oportuno, irei propô-las aos meus alunos (possivelmente com adaptações), de modo a proporcionar-lhes aprendizagens matemáticas mais sofisticadas.

Capítulo 3 – Trabalhos de alunos

Exemplos da tarefa “Polígonos a partir de polígonos”

As tarefas seguintes foram propostas a alunos do 12º ano de Matemática A, em sala de aula.

Foi-lhes apresentado um caso particular da variação da investigação.

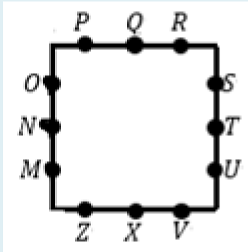
A um primeiro grupo de alunos foi-lhes proposta a seguinte tarefa:

Tarefa

Na figura ao lado, está representado um quadrado no qual, sobre cada um dos seus lados, estão marcados três pontos.

Considere que de cada um dos lados do quadrado se seleciona pelo menos um ponto para construir um polígono convexo.

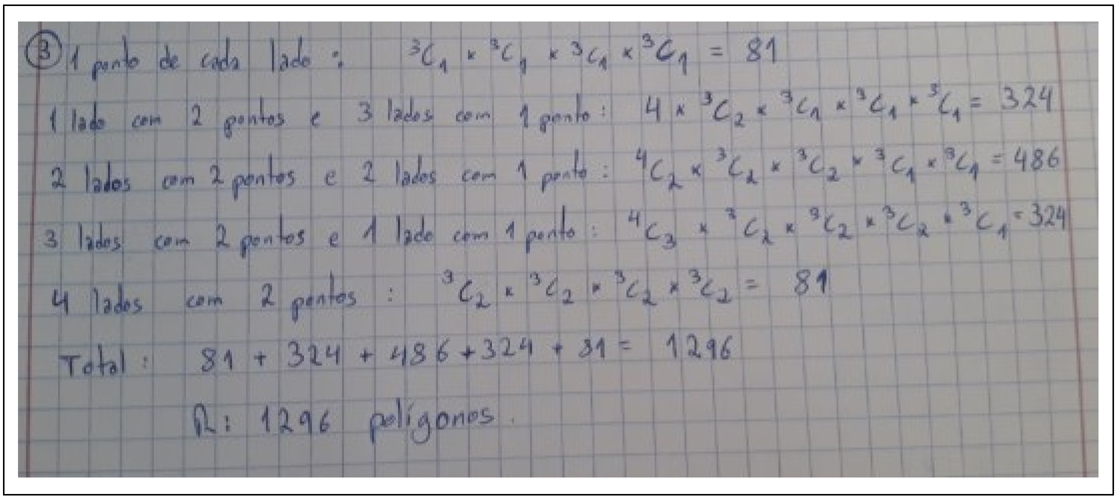
Por exemplo, se forem selecionados os pontos P, R, S, V, X e M, obtém-se o Hexágono $[PRSVXM]$.



Determine quantos polígonos convexos se podem construir nestas condições.

De seguida, apresentam-se duas das resoluções recolhidas.

Na primeira é evidente um processo de resolução por etapas. O aluno pensou nos diversos casos possíveis e começou por efetuar a contagem de cada um deles.



③ 1 ponto de cada lado: $^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 = 81$

1 lado com 2 pontos e 3 lados com 1 ponto: $4 \times {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 = 324$

2 lados com 2 pontos e 2 lados com 1 ponto: $^4C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 = 486$

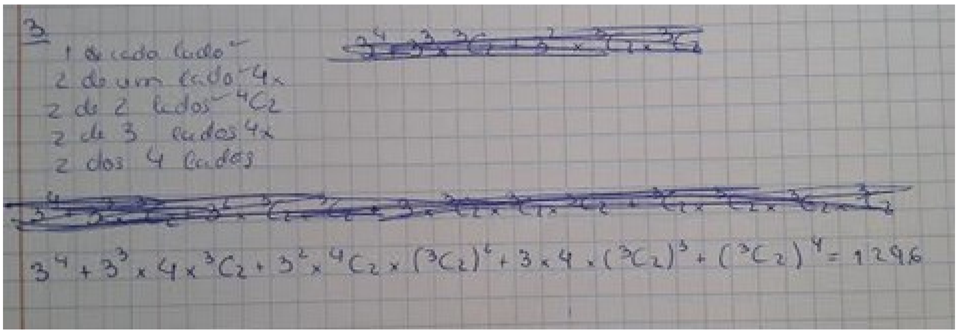
3 lados com 2 pontos e 1 lado com 1 ponto: $^4C_3 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_1 = 324$

4 lados com 2 pontos: $^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 = 81$

Total: $81 + 324 + 486 + 324 + 81 = 1296$

R: 1296 polígonos.

Na segunda, o aluno identifica também todos os casos possíveis e evidencia, desde logo, a contagem de casos semelhantes com recurso a combinações.



A um outro grupo de alunos foi-lhes proposta a tarefa seguinte:

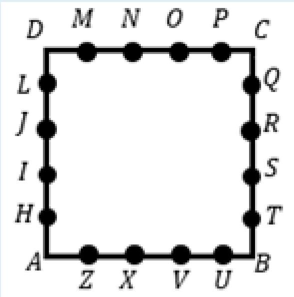
Tarefa

Na figura ao lado, está representado o quadrado [ABCD].

Sobre cada um dos lados do quadrado, estão marcados quatro pontos.

De cada lado do quadro, seleciona-se pelo menos um ponto (dos quatro marcados) e constrói-se um polígono convexo cujos vértices são esses pontos.

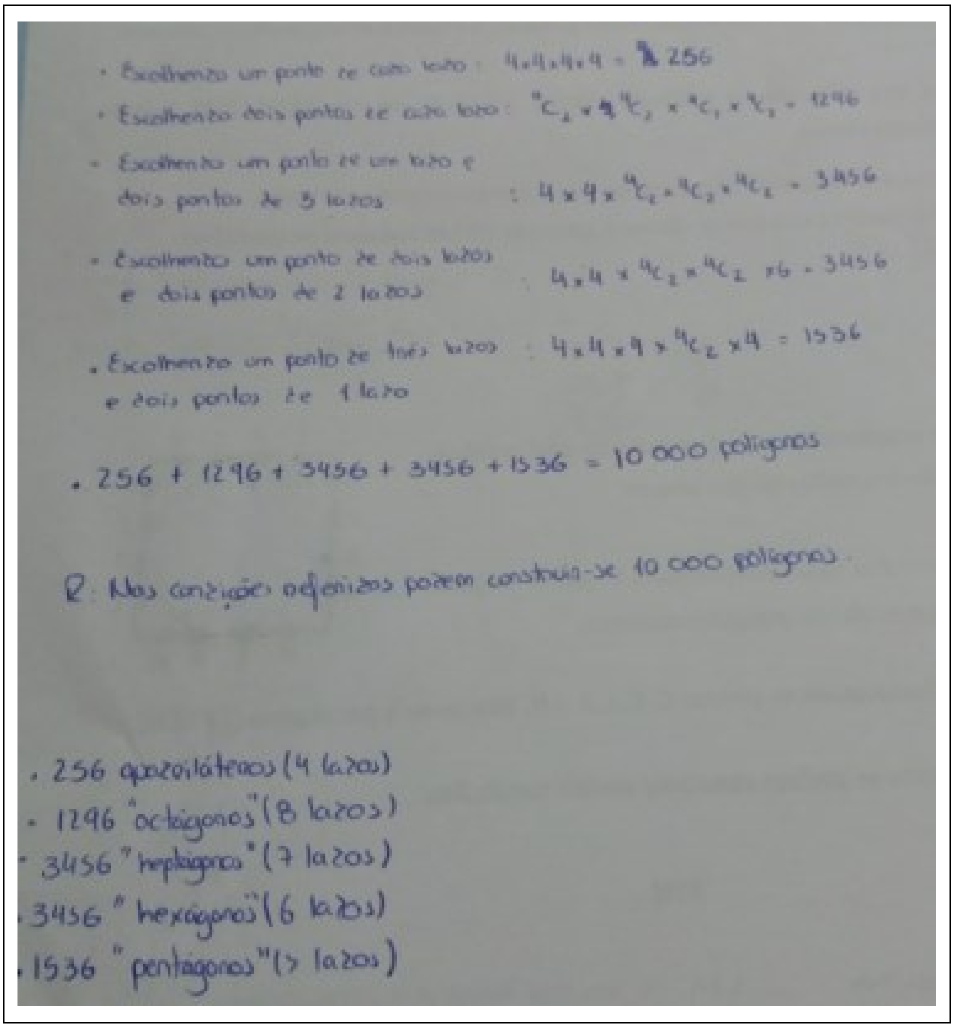
Por exemplo, se forem selecionados os pontos L, M, Q, R e X, obtém-se o pentágono $[LMQRX]$.



Determine quantos polígonos convexos se podem construir nas condições dadas.

De seguida, apresentam-se duas das resoluções recolhidas.

Na primeira, é evidente a preocupação em discriminar todas as situações possíveis e efetuar a contagem de cada uma delas.

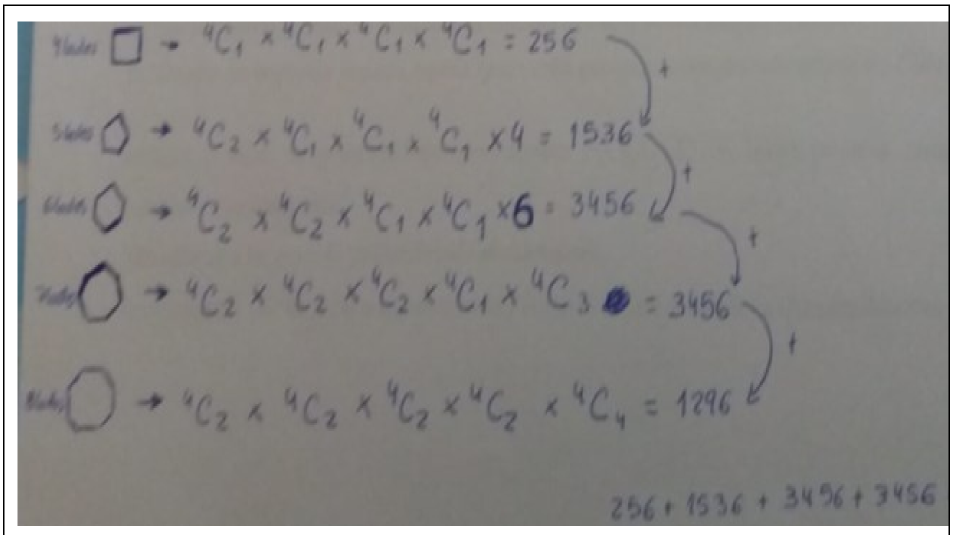


- Escolhendo um ponto de cada lado: $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$
- Escolhendo dois pontos de cada lado: ${}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 = 1296$
- Escolhendo um ponto de um lado e dois pontos de 3 lados: $4 \times 4 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 = 3456$
- Escolhendo um ponto de dois lados e dois pontos de 2 lados: $4 \times 4 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times 6 = 3456$
- Escolhendo um ponto de três lados e dois pontos de 1 lado: $4 \times 4 \times 4 \times {}^4C_2 \times 4 = 1536$
- $256 + 1296 + 3456 + 3456 + 1536 = 10\,000$ polígonos

R: Nas condições definidas podem construir-se 10 000 polígonos.

- 256 quadriláteros (4 lados)
- 1296 "octógonos" (8 lados)
- 3456 "heptágonos" (7 lados)
- 3456 "hexágonos" (6 lados)
- 1536 "pentágonos" (5 lados)

Na segunda resolução também são contempladas todas as situações possíveis e em cada uma delas o aluno recorre à combinatória para obter, no último passo, todos os casos semelhantes.



4 lados $\rightarrow {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 = 256$ +

5 lados $\rightarrow {}^4C_2 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times 4 = 1536$ +

6 lados $\rightarrow {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times 6 = 3456$ +

7 lados $\rightarrow {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_1 \times {}^4C_3 = 3456$ +

8 lados $\rightarrow {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_4 = 1296$

$256 + 1536 + 3456 + 3456$

Exemplos da tarefa “Ora bolas!”

Tarefa exploratória – Combinatória e Probabilidades

Situação A

① A solução apresentada subtrai à probabilidade da ocorrência de todos os casos possíveis (1), a probabilidade de as bolas amarelas ficarem juntas.

O número de casos favoráveis para que as bolas amarelas fiquem juntas é igual ao produto entre o número de maneiras diferentes que podem ficar colocadas na ~~sequência~~ fila (9), de modo a que fiquem juntas, o número de permutações que podem ocorrer entre si (2!) e o número de permutações que podem ocorrer entre as bolas de cores que não o amarelo (8!).

O número de casos possíveis é igual ao número de maneiras diferentes de permutar as 10 bolas entre si (10!).

Assim, atendendo à regra de Laplace, a probabilidade de um dado acontecimento é igual ao número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis, sendo a probabilidade de as bolas amarelas não ficarem juntas

$$P = 1 - \frac{9 \times 2! \times 8!}{10!}$$

② Retiram-se as bolas existentes num saco (com bolas de 3 cores diferentes), amarelas, brancas e castanhas) em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila. Indique a probabilidade de as bolas amarelas não ficarem juntas.

$$P = 1 - \frac{(a+b+c-a+1) \times a! \times (b+c)!}{(a+b+c)!} = 1 - \frac{(b+c+1) \times a! \times (b+c)!}{(a+b+c)!}$$

③ Num saco existem bolas indistinguíveis ao tato, numeradas, com K cores diferentes. Retiram-se as bolas em simultâneo, ao acaso, sendo colocadas em fila. Indique a probabilidade de as bolas de uma cor (seja essa cor c_1) não ficarem juntas.

$$P = 1 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{K} c_i - c_1 + 1\right) \times c_1! \times \left(\sum_{i=1}^{K} c_i - c_1\right)!}{\left(\sum_{i=1}^{K} c_i\right)!}$$

Situação A

* ao acontecimento $\bar{A}$

1. A solução apresentada é válida, porque, sendo A o acontecimento do enunciado, se recorre ao teorema $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Neste caso, $P(\bar{A})$ designa a probabilidade de as bolas amarelas ficarem juntas: enquanto grupo podem ocupar 9 posições distintas (1 e 2, 2 e 3, ..., 9 e 10) e, em cada uma dessas posições, pode permutar-se as posições das 2 bolas amarelas ($2!$) e das oito bolas restantes ($8!$) – portanto, o número de casos favoráveis* é igual a $9 \times 2! \times 8!$, sendo esse número dividido pelo número de casos possíveis ($10!$) para se obter $P(\bar{A})$.

2. Num saco existe um determinado número de bolas numeradas de três cores diferentes: a bolas amarelas, b bolas brancas e c bolas castanhas.

Retiram-se todas as bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila. Qual a probabilidade de as bolas amarelas não ficarem juntas?

Resposta: $$p = 1 - \frac{[a+b+c-(a-1)] \times a! \times (b+c)!}{(a+b+c)!}$$

3. Num saco existe um determinado número de bolas numeradas de k cores diferentes: c_1 bolas de uma cor (seja essa cor A), c_2 bolas de outra cor, ..., e c_k bolas de outra cor.

Retiram-se todas as bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila. Qual a probabilidade de ~~todas~~ as bolas da cor A não ficarem juntas?

Resposta: $$p = 1 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{k} c_i - (c_1 - 1)\right] \times c_1! \times \left(\sum_{i=2}^{k} c_i\right)!}{\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right)!}$$

Situação B

1. Divide-se o número de casos favoráveis (produto de $3!$ – número de maneiras possíveis de organizar as diferentes cores: amarelas-brancas-castanhas, amarelas-castanhas-brancas, ..., –, $2!$, $3!$ e $5!$ – número de permutações possíveis entre as bolas amarelas, brancas e castanhas, respetivamente) pelo número de casos possíveis ($10!$).

2. Num saco existe um determinado número de bolas numeradas de três cores diferentes: a bolas amarelas, b bolas brancas e c bolas castanhas.

Retiram-se todas as bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila. Qual a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem juntas?

Resposta: $$p = \frac{3! \times a! \times b! \times c!}{(a+b+c)!}$$

Situação A

(1) A solução apresentada contabiliza a probabilidade de ~~o número de casos onde~~ os bolas amarelas ficarem juntas. Depois, para resolver o problema subtrai-se a 1 o resultado, sendo que o 1 é a probabilidade certa.

De acordo com a regra de Laplace, aplica $P = \frac{N_{c.f}}{N_{c.p}}$.

O número de casos possíveis é o número de maneiras de ordenar as bolas sem restrições (10!). O número de casos ~~fav~~ favoráveis é são os casos onde as bolas amarelas estão juntas. Neste caso, existem 9 ~~posi~~ posições que as bolas amarelas podem se encontrar, como são diferentes entre si, faz-se 2!. Como a ordem das restantes 8 bolas não ~~interessam~~ interessam, então ~~ou~~ o número de casos favoráveis é

$9 \times 2! \times 8!$

Logo a solução apresentada é válida.

(2) Um saco contém bolas diferentes, com a amarelas, b brancas e c castanhas. Retiram-se todas as bolas do saco, ~~...~~ ao ~~...~~ acaso, e colocam-se em fila. Qual é a probabilidade de as bolas amarelas não ficarem juntas?

$$P = 1 - \frac{(a+b+c-1) \times b! \times (a+c)!}{(a+b+c)!}$$

Um saco contém bolas de diferentes cores, todas diferentes entre si.

(3) Retiram-se todas as bolas do saco, ao acaso, e colocam-se em fila. Qual é a ~~a~~ probabilidade de as bolas de uma determinada cor não ficarem juntas?

$$P = \left(1 - \frac{(c_1+c_2+\ldots+c_k) - c_k+1)! \times c_k! \times (c_1+c_2+\ldots+c_k - c_k)!}{(c_1+c_2+\ldots+c_k)!}\right)$$

Situação A

1. $p = 1 - \left(\dfrac{9 \times 2! \times 8!}{10!}\right)$ → complementar da probabilidade de as bolas amarelas ficarem juntas.

$$\frac{10!}{10!} - \left(\frac{9 \times 2! \times 8!}{10!}\right)$$

↳ todas as distribuições possíveis das 10 bolas

$2!$ → nº permutações das 2 bolas amarelas

9 → nº de posições em que as bolas amarelas ficam juntas

$8!$ → nº de permutações das outras 8 bolas

2. • $a + b + c = n$ (nº total de bolas)

Num saco de n bolas existem "a" bolas amarelas; "b" bolas brancas; "c" bolas castanhas. Retirando as n bolas simultaneamente, qual é a probabilidade de as "a" bolas amarelas não ficarem juntas?

$$p = \frac{n!}{n!} - \left(\frac{(n-(a-1)) \cdot a! \cdot (n-a)!}{n!}\right) = \boxed{1 - \frac{(n-a+1) \cdot a! \cdot (n-a)!}{n!}}$$

3. Num saco de n bolas existem bolas de K cores diferentes.

Denominando uma cor por c'_1, qual é a probabilidade das bolas - c_1 - dessa cor não ficarem juntas?

$$\boxed{p = 1 - \frac{(n - c_1 + 1) \cdot c_1! \cdot (n - c_1)!}{n!}}$$

Situação A

1\. ~~A probabilidade de~~ "As bolas amarelas não ficarem juntas" é o acontecimento ~~complementar~~ contrário de "As bolas amarelas ficarem juntas", logo, a probabilidade do primeiro é igual a 1 menos à probabilidade do segundo.

$9 \times 2!$ → nº de ~~maneiras~~ posições em que as amarelas ficam juntas tendo em conta que podem trocar de lugar.

$8!$ → número de maneiras de as restantes oito bolas trocarem de posição entre si.

$10!$ → número de maneiras diferentes de as dez bolas ficarem dispostas em fila.

Assim, a probabilidade é o número de casos favoráveis a dividir pelos casos possíveis.

2 - Problema

Num saco existem ~~algumas~~ $(a+b+c)$ bolas indistinguíveis ao tato: a bolas amarelas, b bolas brancas e c bolas castanhas. Considera ainda que ~~existem~~ as bolas estão numeradas de 1 a $(a+b+c)$.

Retiram-se as ~~dez~~ $(a+b+c)$ bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila.

A probabilidade de as bolas amarelas não ficarem juntas pode ser dada por

$$p = 1 - \frac{(a+b+c-1) \times a! \times (b+c)!}{(a+b+c)!}$$

3 - Problema

Num saco existem $\sum_{n=1}^{k} c_n$ bolas indistinguíveis ao tato: c_1 bolas da cor 1, c_2 bolas da cor 2, ..., c_k bolas da cor k.

Retiram-se as $\sum_{n=1}^{k} c_n$ bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila.

A probabilidade de as c_1 bolas de cor c_1 não ficarem juntas pode ser dada por:

$$p = 1 - \frac{\left(\sum_{n=1}^{k} c_n - c_1 + 1\right) \times c_1! \times \left(\sum_{n=1}^{k} c_n - c_1\right)!}{\left(\sum_{n=1}^{k} c_n\right)!}$$

Situação A

1. A solução é válida porque a probabilidade das bolas amarelas não ficarem juntas é igual a "1 - probabilidade de ficarem" ($P(\bar{A}) = 1 - P(A)$). A probabilidade de ficarem juntas é $P = \frac{2! \times 9 \times 8!}{10!}$, logo a $P(\text{não ficarem juntas}) = 1 - \frac{2! \times 9 \times 8!}{10!}$.

2. (*) A probabilidade de as bolas amarelas não ficarem juntas é dada por:

$$P = 1 - \frac{a! \times (b+c+1) \times (b+c)!}{(a+b+c)!}$$

(*) Num saco existem a+b+c bolas: a amarelas, b brancas e c castanhas. Retiram as a+b+c bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila.

3. Num saco existem $c_1 + c_2 + c_k$ bolas: c_1 bolas de uma cor, c_2 de outra cor e c_k bolas de outra cor. A probabilidade de as bolas com a cor 1 não ficarem juntas é:

$$P = 1 - \frac{c_1! \times (c_2 + \cdots + c_k + 1) \times (c_2 + \cdots + c_k)!}{(c_1 + c_2 + \cdots + c_k)!}$$

Situação B

1. A solução é válida porque a probabilidade das bolas da mesma cor ficarem juntas é igual ao produto do número de maneiras de dispor as bolas brancas (3!), com o número de maneiras de dispor as amarelas (2!), com o número de maneiras de dispor as bolas castanhas (5!), com o número de permutações que elas podem fazer entre si depois de dispostas todas as cores (3!) - número de casos possíveis, a dividir por todas as maneiras possíveis de colocar as 10 bolas nos 10 lugares (10!) - número de casos favoráveis

2. Num saco existem a+b+c bolas: a bolas amarelas, b bolas brancas e c bolas castanhas. Retiram-se as a+b+c bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila. A probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem juntas pode ser dada por:

$$P = \frac{3! \times a! \times b! \times c!}{(a+b+c)!}$$

10 bolas numeradas de 1 a 10 | 2 amarelas
3 brancas
5 castanhas

Situação A

① Uma possível solução para esta experiência será $p = \frac{10! - 9 \times 2! \times 8!}{10!}$ em que $10!$ é o nº de maneiras de arrumarmos todas as 10 bolas em linha e $9 \times 2! \times 8!$ é o nº de maneiras de as bolas amarelas ficarem juntas ($2!$ - maneiras de as bolas amarelas trocarem entre si, 9 - nº de maneiras de elas serem arrumadas juntas ao longo dos 10 lugares, $8!$ - nº de maneiras de arrumar as restantes 8 bolas nos 8 lugares restantes).

Assim temos que: $p = \frac{10! - 9 \times 2! \times 8!}{10!} =$

$$= \frac{10!}{10!} - \frac{9 \times 2! \times 8!}{10!} = 1 - \frac{9 \times 2! \times 8!}{10!}$$

② Generalização:

em que n = nº total de bolas

$(n = a + b + c)$

$$p = 1 - \frac{(n + 1 - a) \times a! \times (n - a)!}{n!}$$

Problema semelhante ao da situação A:

Num saco existem 20 bolas indistinguíveis ao tato e numeradas de 1 a 20, sendo que 10 são amarelas, 5 são brancas e 5 são castanhas. Retiram-se as 20 bolas em simultâneo, ao acaso, e colocam-se em fila. a) Qual é a probabilidade de as bolas amarelas não ficarem juntas?

Utilizando a generalização, sendo que $n = 20$ e $a = 10$

$$p = 1 - \frac{(20 + 1 - 10) \times 10! \times (20 - 10)!}{20!} =$$

$$= 1 - \frac{11 \times 10! \times 10!}{20!} \simeq 0,1000$$

③ Num saco existem 40 bolas de k cores diferentes, sendo ~~uma cor e_1, outra~~ e_1 ~~e_2~~ bolas de uma cor, c_2 bolas de outra cor, etc. Retiraram-se as 40 bolas em simultâneo e colocaram-se em fila, ao acaso. Qual é a probabilidade de as bolas da cor e_1 não ficarem juntas?

$e_1 \rightarrow$ bolas da cor e_1

$n \rightarrow$ nº total de bolas

$$p = 1 - \frac{(n + 1 - e_1) \times e_1! \times (n - e_1)!}{n!}$$

$$p = \frac{1 - (40 + 1 - e_1) \times e_1! \times (40 - e_1)!}{40!} = p = \frac{1 - (41 - e_1) \times e_1! \times (40 - e_1)!}{40!}$$

Bibliografia

P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.) (1996). *Investigar para aprender matemática*. APM.

P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs) (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. APM.

J. P. Ponte, J. Brocardo & H. Oliveira (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica.